Динамическая модель коллективного поведения

Белолипецкий А.А.

Вычислительный центр им. А.А.Дородницына ФИЦ ИУ РАН

§1. Некоторые свойства решений линейных однородных разностных уравнений

В работах П.С. Краснощекова [1]-[2] была предложена и исследована статическая модель коллективного поведения. Кратко ее основные положения можно изложить в следующем виде. Пусть ЛПР (лицо, принимающее решение) может принять одно из двух $S = 1,2$ альтернативных решений. Вероятность того, что i -й индивид, $i = \overline{1,N}$, примет решение с номером $s = 1$ равно $p_i \in [0,1]$, а с номером $s = 2$ равно $1 - p_i$.

Пусть μ_i есть коэффициент индивидуализма (самостоятельности) i -го ЛПР. При $\mu = 1$ данное ЛПР абсолютно самостоятельно и его нельзя заставить изменить решение, а при $\mu = 0$ - это абсолютный конформист (флюгер), меняющий решения в угоду любому чужому мнению. Пусть $\lambda_{ij} \in [0,1]$ - вероятность того, что i - е ЛПР примет решение $s = 1$ после общения с j -м ЛПР, при условии, что j -е ЛПР придерживается $s = 1$-й альтернативы. Тогда для полного конформиста ($\mu = 0$) вероятность того, что после общения с коллективом им будет принято первое решение по формуле полной вероятности запишется как

$$p_i^0 = \sum_{j=1}^{N} \lambda_{ij} p_j \,.$$

Очевидно, что $\lambda_{ii} = 0$, т.к. собственное мнение для конформиста не имеет веса, и, если все $p_j = 1,\ j \neq i$, то $p_i^0 = 1$ (коллектив всегда убедит конформиста принять мнение «общества»). Следовательно

$$\sum_{j=1}^{N} \lambda_{ij} = 1,\ i = \overline{1,N} \,.$$

Если же i -е ЛПР самостоятельно в принятии решения ($\mu = 1$), то соответствующая вероятность будет равно априорной вероятности α_i . Для промежуточных значений $\mu \in (0,1)$ имеет смысл вычислять вероятность в виде выпуклой комбинации

$$p_i = \mu_i \alpha_i + (1 - \mu_i) p_i^0 = \mu_i \alpha_i(s) + (1 - \mu_i) \sum_{j=1}^{N} \lambda_{ij} p_j \,.$$

Рассмотрим динамическую модель, в которой априорное решение на данном шаге равно апостериорному на предыдущем шаге. Она примет вид системы линейных разностных уравнений

$$p_i(k+1)=\mu_i p_i(k)+(1-\mu_i)\sum_{j=1}^{N}\lambda_{i\,j}p_j(k+1),\ \ i=\overline{1,N}. \qquad (1)$$

Здесь $k=0,1,2,...$ - дискретное время, параметры

$$\mu_i\in[0,1],\lambda_{ij}>0, i\neq j, \lambda_{ii}=0, \sum_{j=1}^{N}\lambda_{ij}=1. \qquad (2)$$

Требуется найти функции $p_i(k)$, при заданных начальных условиях $p_i(0)$, $i=\overline{1,N}$.

Пусть $\mathbf{p}=\left(p_1,...,p_N\right)^T$, $\Lambda=\left(\lambda_{ij}\right), i,j=\overline{1,N}$, $\mathrm{M}=diag(\mu_1,...,\mu_N), \mu_1+...+\mu_N>0$, диагональная матрица, E - единичная матрица. Тогда систему (1) можно записать в векторном виде

$$(E-A)\mathbf{p}(k+1)=\mathrm{M}\mathbf{p}(k),\ \text{где} \qquad (3)$$

$$A=(E-\mathrm{M})\Lambda. \qquad (4)$$

Определение 1. Квадратная матрица $A\left(N\times N\right)$ называется разложимой, если одновременной перестановкой строк и столбцов ее можно представить в виде $\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{bmatrix}$, где $A_1\left(m\times m\right),\ A_3\left(\left(N-m\right)\times\left(N-m\right)\right), m<N$.

Предложение 1. *Если матрица* A *разложима, то и матрица* A^2 *разложима, причем* $A^2=\begin{bmatrix} A_1^2 & \tilde{A}_2 \\ 0 & A_3^2 \end{bmatrix}$.

Доказательство следует из определения 1.

Предложение 2. *Если все* $\mu_i<1$*, то матрица (4) неразложима.*

Δ Пусть $a_{ij}^{(2)}$ произвольный элемент матрицы A^2, стоящий на пересечении i -й строки и j - го столбца. Из (4) следует, что $a_{ij}^{(2)}=\sum_{k=1}^{N}\left(1-\mu_i\right)\lambda_{ik}\left(1-\mu_k\right)\lambda_{kj}$. Из (2) и условия предложения следует, что $a_{ij}^{(2)}>0$. Отсюда и из предложения 1 получаем справедливость утверждения ▲

Теорема (Фробениуса-Перрона). *Если неотрицательная матрица* A *неразложима, то у нее существует собственное число* λ_A *такое, что для любого другого собственного числа* λ *справедливо* $|\lambda| < \lambda_A$, *а соответствующий правый собственный вектор- столбец* $\mathbf{x}_A$, $\left(A\mathbf{x}_A = \lambda_A \mathbf{x}_A\right)$, *и левый собственный вектор- строка* $\mathbf{y}_A$, $\left(\mathbf{y}_A A = \lambda_A \mathbf{y}_A\right)$, *положительны.*

Доказательство теоремы можно найти, например, в книге Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Наука. Гл. ред. физмат литературы. 1967.

Определение 2. Собственное число λ_A называют фробениусовым числом, а векторы $\mathbf{x}_A$, $\mathbf{y}_A$ - правым и левым фробениусовыми векторами.

Пусть $r = \min\limits_{i=\overline{1,N}} r_i$, $R = \max\limits_{i=\overline{1,N}} r_i$, где $r_i = \sum\limits_{j=1}^{N} a_{ij}$.

Предложение 3. *Если* A *неотрицательная неразложимая матрица, то при* $r < R$ *ее фробениусово число* $r < \lambda_A < R$. *Если же* $r = R$, *то* $\lambda_A = R$.

Δ Пусть вектор $\mathbf{y}_A$ таков, что $\sum\limits_{i=1}^{N} y_A^i = 1$. Умножим равенство $\mathbf{y}_A A = \lambda_A \mathbf{y}_A$ справа на вектор - столбец $\mathbf{e} = (1,1,\ldots,1)^T$. Получим $\sum\limits_{j=1}^{N}\sum\limits_{i=1}^{N} a_{ij} y^i = \lambda_A \sum\limits_{i=1}^{N} y^i = \lambda_A$. Поменяв в левой части равенства порядок суммирования, имеем $\lambda_A = \sum\limits_{i=1}^{N} y^i \sum\limits_{j=1}^{N} a_{ij} = \sum\limits_{i=1}^{N} r_i y^i \begin{cases} < R \\ > r \end{cases}$.
Строгие неравенства следуют из того, что вектор $\mathbf{y}_A$ положителен и $r < R$. Если же $r = R$, то $\lambda_A = R$ ▲

Определение 3. Неотрицательную матрицу A назовем продуктивной, если существует неотрицательная матрица $\left(E - A\right)^{-1}$.

Предложение 4. *Неотрицательная неразложимая матрица* A *продуктивна тогда и только тогда, когда ее фробениусово число* $\lambda_A < 1$.

Δ Достаточность. Пусть $\lambda_A < 1$. Если $\mathbf{x}_A$ правый фробениусов вектор, то $A^k \mathbf{x}_A = \lambda_A^k \mathbf{x}_A$. Отсюда и их положительности компонент вектора $\mathbf{x}_A$ следует, что $A^k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$. Из тождества $E - A^k = \left(E - A\right)\left(E + A + A^2 + \ldots + A^{k-1}\right)$ заключаем, что $E = \lim\limits_{k\to\infty}\left(E - A^k\right) = \left(E - A\right)\lim\limits_{k\to\infty}\left(E + A + A^2 + \ldots + A^{k-1}\right) = \left(E - A\right)C$. Последний предел существует, так как существует предел слева. Отсюда следует, что $\left(E + A + A^2 + \ldots\right)$ неотрицательна и равна $\left(E - A\right)^{-1}$.

Необходимость. Пусть матрица $\left(E - A\right)^{-1} \geq 0$. Для вектора $\mathbf{p} > \mathbf{0}$. Решение уравнения $\left(E - A\right)\mathbf{x} = \mathbf{p}$ существует и $\mathbf{x} = \left(E - A\right)^{-1}\mathbf{p} > \mathbf{0}$. Очевидны соотношения $\lambda_A \mathbf{y}_A \mathbf{x} = \mathbf{y}_A A\mathbf{x} = \mathbf{y}_A\left(\mathbf{x} - \mathbf{p}\right) < \mathbf{y}_A \mathbf{x}$. Отсюда и из положительности числа $\mathbf{y}_A \mathbf{x}$ следует неравенство $\lambda_A < 1$ ▲

Предложение 5. *Если* $\sum_i^N \mu_i > 0$*, то фробениусово число матрицы (4) меньше единицы.*

Δ Сумма элементов i -й строки матрицы (4) равна $r_i = (1 - \mu_i)\sum_{j=1}^N \lambda_{ij} = (1 - \mu_i) \leq 1$.

Следовательно и $r = \min_{i=\overline{1,N}} r_i > 0, \quad R = \max_{i=\overline{1,N}} r_i \leq 1$. Если $r < R$, то из предложения 3 следует, что $\lambda_A < R \leq 1$. Если же $r = R$, то все $r_i = R = 1 - \mu < 1$. Из предложения 3 тогда следует равенство $\lambda_A = R < 1$▲

Лемма 1. *Если все параметры* $\mu_i < 1$*, то система уравнений (3), а значит и система (1) однозначно разрешимы и справедливы рекуррентные соотношения*

$$\mathbf{p}(k+1) = (E - A)^{-1}\mathrm{M}\mathbf{p}(k). \tag{5}$$

Если же при этом $\mathbf{p}(k) \geq 0$*, то и* $\mathbf{p}(k+1) \geq 0$.

Δ Из условий леммы и предложения 2 следует, что неотрицательная матрица A неразложима, а из предложения 5 заключаем, что её фробениусово число λ_A меньше единицы. Тогда предложение 4 гарантирует продуктивность матрицы $E - A$. То есть уравнение (3) имеет решение (5) ▲

Лемма 2. *Для любой положительной матрицы* $\Lambda = \left(\lambda_{ij}\right), i, j = \overline{1, N}$*, у которой сумма элементов в любой строке равна единице, а все её диагональные элементы равны нулю и значений* $\mu_1, \ldots, \mu_N \in [0,1], \mu_1 + \ldots + \mu_N > 0$*, решения уравнения (1) таковы, что выполняются неравенства*

$$\max_{1 \leq j \leq N} p_j(k+1) < \max_{1 \leq j \leq N} p_j(k), \min_{1 \leq j \leq N} p_j(k+1) > \min_{1 \leq j \leq N} p_j(k). \tag{6}$$

Более того, существует $\varepsilon_0 < 1$ *для которого справедливо неравенство*

$$\pi_{\max}(k) - \pi_{\min}(k) \leq \varepsilon^k \left(\pi_{\max}(0) - \pi_{\min}(0)\right). \tag{7}$$

Δ Для произвольного $k = 0,1,2,\ldots$ обозначим $\pi_{\max}(k) = \max\limits_{1\le j\le N} p_j(k), \pi_{\min}(k) = \min\limits_{1\le j\le N} p_j(k)$.

1. Если $\pi_{\max}(k) = \pi_{\min}(k) = p$, то все $p_i(k) = \pi_{\max}(k) = \pi_{\min}(k) = p, i = \overline{1,N}$. Но в этом случае и все $p_i(k+1) = p, i = \overline{1,N}$. В последнем легко убедиться, подставив значения $p_i(k+1) = p_i(k) = p$ в уравнения (1). В силу леммы 1 эта система однозначно разрешима. То есть $p_i(k+1) = p$ единственное решение. В этом случае лемма очевидна.

2. Итак, считаем, что $\pi_{\max}(k+1) > \pi_{\min}(k+1)$. Пусть $p_m(k+1) = \pi_{\max}(k+1)$. Можно считать, что $\mu_m > 0$. Действительно, если $\mu_m = 0$, то из (1) получаем равенство $\pi_{\max}(k+1) = \sum\limits_{j=1}^{N} \lambda_{m\,j} p_j(k+1)$. Последнее, в силу свойств матрицы Λ, возможно только, если все $p_j(k+1) = \pi_{\max}(k+1)$, а это противоречит нашему предположению. Далее, пусть $p_h(k+1) = \pi_{\min}(k+1)$. Как было только что показано, можно считать, что $\mu_h > 0$. Тогда из (1) получаем

$$\mu_m p_m(k) = \pi_{\max}(k+1) - (1-\mu_m)\sum_{j=1}^{N} \lambda_{m\,j} p_j(k+1) = \mu_m \pi_{\max}(k+1) +$$

$$+(1-\mu_m)\sum_{j=1}^{N} \lambda_{m\,j}\left(\pi_{\max}(k+1) - p_j(k+1)\right) =$$

$$= \mu_m \pi_{\max}(k+1) + (1-\mu_m)\lambda_{m\,h}\left[\pi_{\max}(k+1) - \pi_{\min}(k+1)\right] +$$

$$+(1-\mu_m)\sum_{j=1,\, j\ne h}^{N} \lambda_{m\,j}\left(\pi_{\max}(k+1) - p_j(k+1)\right) \ge$$

$$\ge \mu_m \pi_{\max}(k+1) + (1-\mu_m)\lambda_{m\,h}\left[\pi_{\max}(k+1) - \pi_{\min}(k+1)\right].$$

Отсюда и из неравенства $p_m(k) \le \pi_{\max}(k)$ получаем

$$\pi_{\max}(k) - \pi_{\max}(k+1) \ge \frac{(1-\mu_m)\lambda_{m\,h}}{\mu_m}\left[\pi_{\max}(k+1) - \pi_{\min}(k+1)\right]. \qquad (8)$$

Следовательно, $\pi_{\max}(k+1) < \pi_{\max}(k)$.

Оценим

$$\mu_h p_h(k) = \pi_{\min}(k+1) - (1-\mu_h)\sum_{j=1}^{N} \lambda_{h\,j}\, p_j(k+1) =$$

$$= \mu_h \pi_{\min}(k+1) + (1-\mu_h)\sum_{j=1}^{N} \lambda_{h\,j}(\pi_{\min}(k+1) - p_j(k+1)) =$$

$$= \mu_h \pi_{\min}(k+1) + (1-\mu_h)\lambda_{h\,m}\left[\pi_{\min}(k+1) - \pi_{\max}(k+1)\right] +$$

$$+(1-\mu_h)\sum_{j=1,\, j\neq m}^{N} \lambda_{h\,j}(\pi_{\min}(k+1) - p_j(k+1)) \le$$

$$\le \mu_h \pi_{\min}(k+1) + (1-\mu_h)\lambda_{h\,m}\left[\pi_{\min}(k+1) - \pi_{\max}(k+1)\right].$$

Отсюда, и из неравенства $p_h(k) \ge \pi_{\min}(k)$ получаем

$$\pi_{\min}(k+1) - \pi_{\min}(k) \ge \frac{(1-\mu_h)\lambda_{h\,m}}{\mu_h}\left[\pi_{\max}(k+1) - \pi_{\min}(k+1)\right]. \qquad (9)$$

Следовательно $\pi_{\min}(k+1) - \pi_{\min}(k) > 0$. Неравенства (6) доказаны. Сложим левые и правые части неравенств (8), (9). Получим

$$\left(\pi_{\max}(k) - \pi_{\min}(k)\right) - \left(\pi_{\max}(k+1) - \pi_{\min}(k+1)\right) \ge$$

$$\ge \left[\frac{(1-\mu_m)\lambda_{mh}}{\mu_m} + \frac{(1-\mu_h)\lambda_{h\,m}}{\mu_h}\right]\left[\pi_{\max}(k+1) - \pi_{\min}(k+1)\right] \ge$$

$$\ge 2c\left[\pi_{\max}(k+1) - \pi_{\min}(k+1)\right],$$

где $c = \min\limits_{\mu_i > 0} \dfrac{(1-\mu_i)}{\mu_i} \cdot \min\limits_{i\neq j} \lambda_{ij} > 0$. Отсюда следует, что

$\left(\pi_{\max}(k) - \pi_{\min}(k)\right) \ge (1+2c)\left[\pi_{\max}(k+1) - \pi_{\min}(k+1)\right]$ или

$\left(\pi_{\max}(k+1) - \pi_{\min}(k+1)\right) \le \varepsilon\left[\pi_{\max}(k) - \pi_{\min}(k)\right]$, где $\varepsilon = (1+2c)^{-1} < 1$. Последнее неравенство гарантирует справедливость оценки (7)▲

Следствие 1. *Все значения* $p_i(k) \xrightarrow[k\to\infty]{} p^*,\ i = \overline{1,N}$.

Если рассмотреть уравнение (1) в комплексной плоскости, то будет справедлива

Лемма 3. *Для любой положительной матрицы* $\Lambda = \left(\lambda_{ij}\right), i, j = \overline{1,N}$, *у которой сумма элементов в любой строке равна единице, а все её диагональные элементы равны нулю и значений* $\mu_1,\dots,\mu_N \in [0,1],\ \mu_1 + \dots + \mu_N > 0$, *решения уравнения (1) в комплексной плоскости таковы, что выполняются неравенства*

$$\max_{1\le j\le N} \mathrm{Re}\left(p_j(k+1)\right) \le \max_{1\le j\le N} \mathrm{Re}\left(p_j(k)\right),\ \min_{1\le j\le N} \mathrm{Re}\left(p_j(k+1)\right) \ge \min_{1\le j\le N} \mathrm{Re}\left(p_j(k)\right),$$

$$\max_{1\le j\le N} \mathrm{Im}\left(p_j(k+1)\right) \le \max_{1\le j\le N} \mathrm{Im}\left(p_j(k)\right),\ \min_{1\le j\le N} \mathrm{Im}\left(p_j(k+1)\right) \ge \min_{1\le j\le N} \mathrm{Im}\left(p_j(k)\right).$$

Доказательство дословно совпадает с доказательством леммы 2.

Теорема 1. *Если выполнены условия леммы 2 и все компоненты* $p_i(0)\in[a,b]$*, то и все компоненты* $p_i(k)\in[a,b]$, $k=1,2,...$.

Доказательство следует из леммы 2.

В частности, справедливы

Следствие 1. *Если все компоненты* $p_i(0)\in[0,1]$*, то и все компоненты* $p_i(k)\in[0,1]$, $k=1,2,...$.

Следствие 2. *В одношаговой модели, где* $p_i(0)=\alpha_i\in[0,1]$, $p_i(1)=p_i$, $i=\overline{1,N}$*, все значения* $p_i\in[0,1]$.

Исследуем систему разностных уравнений (1) на устойчивость к возмущению начальных условий. Пусть $p_i(k)$ - решения системы (1) при заданных начальных условиях $p_i(0)$, $i=\overline{1,N}$, а $p_i(k)+\delta p_i(k)$ - решения системы (1) при возмущенных начальных условиях $p_i(0)+\delta p_i(0)$, $i=\overline{1,N}$.

Теорема 2 (об устойчивости). *Решения системы уравнений (1) устойчивы к возмущениям начальных условий. Иными словами, если все возмущения* $\delta p_i(0)\in[-\varepsilon,\varepsilon]$, $\varepsilon>0$*, то и все вариации* $\delta p_i(k)\in[-\varepsilon,\varepsilon]$, $i=\overline{1,N}$, $k=1,2,...$.

Δ В силу линейности соотношений (1) уравнения для вариаций $\delta p_i(k)$ имеет тот же вид, что и (1), т.е. $\delta p_i(k+1)=\mu_i\cdot\delta p_i(k)+(1-\mu_i)\sum_{j=1}^{N}\lambda_{i\,j}\cdot\delta p_j(k+1)$, $i=\overline{1,N}$. Отсюда и из теоремы 1 следует утверждение теоремы 2▲

Рассмотрим две матрицы $C=\left(c_{ij}\right)$, $D=\left(d_{ij}\right)$ обе размера $N\times N$ и комплексное число z. Пусть $C(z)=\left(c_{ij}z^{\varsigma_{ij}}\right)$, $D(z)=\left(d_{ij}z^{\xi_{ij}}\right)$, где параметры ς_{ij}, ξ_{ij} могут принимать лишь значения ноль или единица. Будем искать нетривиальное решение однородной системы линейных уравнений

$$\left(C(z)-D(z)\right)\mathbf{x}=0. \qquad (10)$$

Необходимым и достаточным условием существования такого решения является условие

$$\det\left(C(z)-D(z)\right)=0. \qquad (11)$$

Характеристическое уравнение (11) является алгебраическим уравнением степени не выше N. Корень z^* уравнения (11) назовём характеристическим числом уравнения (10), а соответствующее ему решение $\mathbf{x}^*$ характеристическим вектором этого уравнения. Очевидно, что характеристический вектор определён с точностью до множителя.

Теорема 3. *Если сумма элементов любой строки матрицы $C(1)$ равняется сумме элементов той же строки матрицы $D(1)$, то уравнение (10) имеет характеристическое число $z^* = 1$, с соответствующим ему характеристическим вектором $\mathbf{x}^*$, все компоненты которого равны единице.*

Δ При сделанных предположениях сумма столбцов матрицы $C(1) - D(1)$ равна нулю, т.е. $\det\left(C(1) - D(1)\right) = 0$. Следовательно, $z^* = 1$ есть характеристическое число уравнения (10). Положим $\mathbf{x}^* = (1,1,...,1)^T$. Тогда любое из уравнений системы (10) запишется как $\sum_{j=1}^{N}(c_{ij} - d_{ij})x_j^* = \sum_{j=1}^{N}(c_{ij} - d_{ij}) = 0$. Т.е. $\mathbf{x}^*$ - характеристический вектор, соответствующий характеристическому числу $z^* = 1$ ▲

Рассмотрим матрицу

$$G(z) = (E - A)z - \mathrm{M}. \tag{12}$$

Лемма 4. *Матрица (12) имеет характеристическое число $z = 1$ и соответствующий характеристический вектор $\mathbf{x} = (1,1,...,1)^T$. Для любого числа z матрицы $C(z) = \left(E - A\right)z$ и $D(z) = \mathrm{M}$ удовлетворяют условиям теоремы 3.*

Δ Сумма элементов i-й строки матрицы $C(z) = \left(E - A\right)z$ согласно (4) равна $z - z(1-\mu_i)\sum_{j=1}^{N}\lambda_{ij} = z - z(1-\mu_i) = z\mu_i$, а соответствующая сумма элементов матрицы $D(z) = \mathrm{M}$ равна μ_i. При $z = 1$ они совпадают. Отсюда и из теоремы 3 следует утверждение леммы ▲

Теорема 4. *Пусть z - характеристическое число, а $\mathbf{x}$ соответствующий ему характеристический вектор матрицы (12). Тогда функция $\mathbf{p}(k) = z^k\mathbf{x}$ является решением уравнения (3).*

Δ Подставив выражение $\mathbf{p}(k) = z^k\mathbf{x}$ в уравнение (3), получим систему уравнений $G(z)\mathbf{x} = 0$. Теперь утверждение следует из условия теоремы ▲

Пример 1. Пусть система (1) состоит из двух уравнений. Причем

$\mu_1 = 1/2,\ \mu_2 = 1/3,\ \Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Тогда $G(z) = \begin{pmatrix} z-1/2 & -z/2 \\ -2z/3 & z-1/3 \end{pmatrix}$.

Характеристическое уравнение $\det D(z) = 0$ имеет вид $4z^2 - 5z + 1 = 0$.
Характеристические числа и соответствующие им характеристические векторы равны

$z_1 = 1,\ z_2 = 1/4,\ \mathbf{x}_1 = (1,1)^T,\ \mathbf{x}_2 = (-1,2)^T$.

Теорема 5. *Все действительные характеристические числа матрицы* $G(z) = (E - A)z - \mathrm{M}$ *по модулю не превосходят 1, а ее характеристические векторы, отвечающие характеристическим числам* $z \neq 1$, *обязаны иметь либо компоненты разных знаков, либо нулевые компоненты.*

Δ 1.Пусть $z > 0$. Поскольку действительный характеристический вектор $\mathbf{x}$ нетривиален и определен с точностью до множителя, то будем считать, что его максимальная компонента положительна. Пусть это будет x_1. Без ограничения общности его минимальная компонента есть x_2. По теореме (4) $\mathbf{p}(k) = z^k\mathbf{x}$. Рассмотрим векторы $\mathbf{p}(0) = \mathbf{x}, \mathbf{p}(1) = z\mathbf{x}$. Очевидно, что первая и вторая компоненты этих векторов являются максимальной и минимальной соответственно. По лемме 2 $p_1(1) = zx_1 \leq p_1(0) = x_1$. Отсюда следует, что $z < 1$. Из той же леммы получаем $p_2(1) = zx_2 \geq p_2(0) = x_2$. Отсюда и из неравенства $z < 1$ следует, что $x_2 \leq 0$.

2. Если $z < 0$, то максимальная компонента у вектора $\mathbf{p}(1)$ есть zx_2, а минимальная zx_1. В силу леммы 2 имеем $x_1 \geq zx_2,\ x_2 \leq zx_1$. Т.к. $x_1 > 0,\ z < 0$, то из обоих неравенств следует, что $x_2 \leq 0$. Если $x_2 \neq 0$, то из обоих неравенств вытекает $z \geq \dfrac{x_2}{x_1},\ z \geq \dfrac{x_1}{x_2}$.

Поскольку либо $\dfrac{x_2}{x_1} \geq -1$, либо $\dfrac{x_1}{x_2} \geq -1$, то $z \geq -1$. Последнее завершает доказательство
▲

Нетрудно видеть, что если все $\mu_i < 1,\ i = \overline{1,N}$, то все характеристические числа уравнения

Теорема 6. *Если все* $\mu_i < 1,\ i = \overline{1,N}$, *то все характеристические числа и характеристические векторы матрицы (12) являются собственными числами и собственными векторами матрицы*

$$L = (E - A)^{-1}\mathrm{M}. \tag{13}$$

Доказательство следует из леммы 1.

Теорема 7. *Если* $\sum_{i=1}^{N}\mu_i > 0,\ \mu_i \in [0,1)$*, то значение* $z=-1$ *не является характеристическим числом матрицы (12), а значит и собственным числом матрицы (13).*

Δ Предположим противное. Тогда для соответствующего характеристического вектора $\mathbf{x}$ получим $G(-1)\mathbf{x}=\mathbf{0}$ или

$$-x_i + (1-\mu_i)\sum_{j=1}^{N}\lambda_{ij}x_j - \mu_i x_i = 0,\ \overline{i=1,N}. \tag{14}$$

Так как $\mathbf{x}$ нетривиальный действительный вектор, то можно считать, что его максимальная координата положительна. Проведя рассуждения аналогичные тем, что были приведены при доказательстве леммы 2, можно показать, что среди максимальных координат найдется координата с номером m, для которой $\mu_m > 0$. Мажорируя левую часть (14), имеем $-x_m + (1-\mu_m)x_m\sum_{j=1}^{N}\lambda_{m\,j} - \mu_m x_m \geq -x_m + (1-\mu_m)\sum_{j=1}^{N}\lambda_{mj}x_j - \mu_m x_m = 0.$ Или $2\mu_m x_m \leq 0$. Последнее невозможно, т.к. $x_m > 0$ ▲

<u>Предположение 1.</u> *Все собственные числа матрицы (13) имеют кратность единица.*

Если это так, то все они вместе с вектором $\mathbf{x}^* = (1,1,\ldots 1)^T$ образуют базис в N-мерном комплекснозначном пространстве. Пусть эти собственные числа равны $z_1 = 1, z_2, z_3, \ldots, z_N$, а соответствующие им собственные векторы $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \ldots, \mathbf{x}_N$, причем $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}^* = (1,1,\ldots 1)^T$. Тогда общее решение уравнения (3) примет вид

$$\mathbf{p}(k) = y_1\mathbf{x}^* + \sum_{i=2}^{N} y_i \mathbf{x}_i z_i^k, \tag{15}$$

где y_i произвольные постоянные. Они определяются начальными условиями

$$\mathbf{p}(0) = y_1\mathbf{x}^* + \sum_{i=2}^{N} y_i \mathbf{x}_i. \tag{16}$$

Система уравнений (16) разрешима в силу вышесказанного. Если все собственные числа $z_i,\ i=\overline{1,N}$, матрицы (13) действительны, то из теорем 5-7 следует, что $|z_i|<1,\ \overline{i=2,N}$. Отсюда и из (15) получаем

$$\lim_{k\to\infty}\mathbf{p}(k) = y_1\mathbf{x}^*.$$

Модификация модели на случай разномасштабных времён реакции участников коллектива на изменение своего мнения

Видоизменим модель (1). Запишем (1) в виде

$$p_i(k+1) - p_i(k) = (1-\mu_i)\sum_{j=1}^{N}\lambda_{i\,j}\,[\,p_j(k+1) - p_i(k)],\ i = \overline{1,N}\,. \tag{17}$$

Предположим, что разные члены коллектива реагируют на изменение своего мнения с разным темпом. То есть существует хотя бы один индивидуум с максимальной скоростью реакции, которую мы примем за 1. Остальные члены коллектива имеют индивидуальную скорость $\tau_i \in [0,1]$. Теперь (17) примет вид

$$p_i(k+1) - p_i(k) = \tau_i(1-\mu_i)\sum_{j=1}^{N}\lambda_{i\,j}\,[\,p_j(k+1) - p_i(k)],\ i = \overline{1,N}\,. \tag{18}$$

Теорема 8. *Система уравнений (18) может быть записана в виде*

$$p_i(k+1) = \tilde{\mu}_i p_i(k) + (1-\tilde{\mu}_i)\sum_{j=1}^{N}\lambda_{i\,j} p_j(k+1), i = \overline{1,N}\,, \tag{19}$$

где $\tilde{\mu}_i(\mu_i,\tau_i) = 1-\tau_i(1-\mu_i) \in [0,1]$. *Очевидно, что* $\tilde{\mu}_i(0,\tau_i) = 1-\tau_i,\ \tilde{\mu}_i(1,\tau_i) = 1,\ \tilde{\mu}_i(\mu,0) = 1,\ \tilde{\mu}_i(\mu,1) = \mu$.

Δ Перепишем (18) в виде

$$p_i(k+1) = p_i(k) + \tau_i(1-\mu_i)\left[\sum_{j=1}^{N}\lambda_{i\,j}\ p_j(k+1) - \sum_{j=1}^{N}\lambda_{i\,j}\ p_i(k)\right] =$$

$$p_i(k+1) = p_i(k) + \tau_i(1-\mu_i)\left[\sum_{j=1}^{N}\lambda_{i\,j}\ p_j(k+1) - p_i(k)\right] =$$

$$= [1-\tau_i(1-\mu_i)]p_i(k) + \tau_i(1-\mu_i)\sum_{j=1}^{N}\lambda_{i\,j}\ p_j(k+1)\,. \tag{20}$$

Здесь было использовано равенство (2). Положим $\tilde{\mu}_i(\mu_i,\tau_i) = 1-\tau_i(1-\mu_i)$. Тогда $(1-\mu_i) = \dfrac{1-\tilde{\mu}_i}{\tau_i}$. Подставим эти выражения в (20) и получим искомое ▲

Из теоремы 8 следует, что даже при наличии разных темпов реакции индивидуумов на изменения, уравнения (1) имеют тот же вид (19), следовательно, и в данной модели *свойства решений, описанные выше, сохраняются.*

§2.Задача о майдане

Это не Пушкин, а Лаврентьева Е.Ф. 2003г.

"Напрасный труд -нет, их не вразумишь -
Чем либеральней, тем они пошлее.
Цивилизация для них фетиш,
Но не доступна им ее идея.
Как перед ней ни гнитесь, господа,
Вам не сыскать признанья от Европы.
В ее глазах вы будете всегда

Не слуги просвещенья, а холопы.
Май 1867г. Ф.Тютчев

Разобьём группу из N человек на две подгруппы: в первой, $i=\overline{1,N_1}$, члены группы имеют $\mu_i=\mu_0$ (майдановцы); во второй, $s=N_1+1,\dots,N$, они имеют $\mu_s=\mu_{00}$ (антимайдановцы). При этом «коэффициенты влияния» членов обеих групп друг на друга таковы:

1.Для всех $i=\overline{1,N_1}$, $\lambda_{ii}=0$, а

$$\lambda_{ij}=\frac{1-\Lambda_0}{N_1-1},\ j=\overline{1,N_1}, \lambda_{ij}=\frac{\Lambda_0}{N-N_1},\ j=\overline{N_1+1,N}\ ; \tag{1}$$

2. Для всех $s=\overline{N_1+1,N}$, $\lambda_{ss}=0$, а

$$\lambda_{sj}=\frac{\Lambda_{00}}{N_1},\ j=\overline{1,N_1}, \lambda_{sj}=\frac{1-\Lambda_{00}}{N-N_1-1},\ j=\overline{N_1+1,N}\ . \tag{2}$$

Коэффициенты $\mu_0,\mu_{00},\Lambda_0,\Lambda_{00}\in[0,1]$. При этом Λ_0 - это коэффициент влияния членов второй группы на мнение членов первой группы. Т.е. чем больше значение Λ_0, тем с большей вероятностью член второй группы склонит к своему мнению члена первой группы. Аналогично, Λ_{00} - коэффициент влияния членов первой группы на мнение членов второй группы. Очевидно следующее утверждение.

Предложение 1. *В неотрицательной матрице* $\Lambda=\left(\lambda_{pr}\right),\ p,r=\overline{1,N}$ *сумма элементов в любой строке равна единице, а все её диагональные элементы равны нулю.*

Разностные уравнения (1)-(2) запишем в виде

$$\begin{gathered}p_i(k+1)=\mu_0 p_i(k)+(1-\mu_0)\frac{1-\Lambda_0}{N_1-1}\sum_{j=1}^{N_1}(1-\delta_{ij})p_j(k+1)+\\+(1-\mu_0)\frac{\Lambda_0}{N-N_1}\sum_{j=N_1+1}^{N}p_j(k+1),\ i=\overline{1,N_1},\end{gathered} \tag{3}$$

$$\begin{gathered}p_s(k+1)=\mu_{00}p_s(k)+(1-\mu_{00})\frac{\Lambda_{00}}{N_1}\sum_{j=1}^{N_1}p_j(k+1)+\\+(1-\mu_{00})\frac{1-\Lambda_{00}}{N-N_1-1}\sum_{j=N_1+1}^{N}(1-\delta_{sj})p_j(k+1),\ s=\overline{N_1+1,N}.\end{gathered} \tag{4}$$

Ниже будем считать выполненными следующие условия: оба неотрицательных параметра μ_0,μ_{00} меньше 1 и хотя бы один из них положителен, а $\Lambda_0,\Lambda_{00}\in(0,1)$. Тогда система разностных уравнений (3)-(4) удовлетворяет условиям леммы 1, следовательно, при заданных начальных условиях она имеет единственное решение.

Предположим, что все

$$p_i(0)=\alpha_0,\ i=\overline{1,N_1},\ p_s(0)=\alpha_{00},\ s=\overline{N_1+1,N}. \qquad (5)$$

Покажем, что решение (3)-(4) имеет вид

$$p_i(k)=P_1(k),\ i=\overline{1,N_1},\ p_s(k)=P_2(k),\ s=\overline{N_1+1,N}. \qquad (6)$$

Действительно, будем искать решение в виде (6) с начальными условиями (5). Из (3)-(5) сразу следуют уравнения для P_1,P_2:

$$P_1(k+1)=\mu_0P_1(k)+(1-\mu_0)(1-\Lambda_0)P_1(k+1)+(1-\mu_0)\Lambda_0P_2(k+1), \qquad (7)$$

$$P_2(k+1)=\mu_{00}P_2(k)+(1-\mu_{00})\Lambda_{00}P_1(k+1)+(1-\mu_{00})(1-\Lambda_{00})P_2(k+1), \qquad (8)$$

$$P_1(0)=\alpha_0,\ P_2(0)=\alpha_{00}. \qquad (9)$$

В матричном виде они записываются как система (3)-(4) предыдущего параграфа, где

$$A=\begin{pmatrix}(1-\mu_0)(1-\Lambda_0) & (1-\mu_0)\Lambda_0\\ (1-\mu_{00})\Lambda_{00} & (1-\mu_{00})(1-\Lambda_{00})\end{pmatrix},$$

и значит система уравнений (7)-(9) однозначно разрешима. Т.е. решение вида (6) с начальными условиями (9) является решением системы (3)-(4) с начальными условиями (5). В силу единственности решения задачи (3)-(5) найденное решение (6) является искомым.

Будем искать частные решения системы (7)-(8) в виде

$$\begin{pmatrix}P_1(k)\\ P_2(k)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}z^k.$$

Для определения $z,\mathbf{x}$ мы получим уравнения (10), (11) из §1, где

$$C(z)=\begin{pmatrix}\left[(1-\mu_0)(1-\Lambda_0)-1\right]z & (1-\mu_0)\Lambda_0z\\ (1-\mu_{00})\Lambda_{00}z & \left[(1-\mu_{00})(1-\Lambda_{00})-1\right]z\end{pmatrix},\ D(z)=\begin{pmatrix}-\mu_0 & 0\\ 0 & -\mu_{00}\end{pmatrix}. \qquad (10)$$

Далее используем обозначение $C=C(1)$. Из вида матриц C,D следует, что $c_{11}+c_{12}=-\mu_0,\ c_{21}+c_{22}=-\mu_{00}$. Т.е. C,D удовлетворяют условиям теоремы 3 из §1, поэтому один из корней уравнения (11) $z_1=1$, соответствующее ему решение $\mathbf{x}$ имеет вид $\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Найдем второе характеристическое число. Характеристическое уравнение (11) в нашем случае имеет вид

$$z^2 \det C + z(c_{11}\mu_{00} + c_{22}\mu_0) + \mu_0\mu_{00} = 0. \tag{11}$$

По теореме Виета второй корень уравнения (11) равен $z_2 = \dfrac{\mu_0\mu_{00}}{\det C}$. Т.к. $c_{11} = -c_{12} - \mu_0, c_{22} = -c_{21} - \mu_{00}$, то $\det C = (c_{12}\mu_{00} + c_{21}\mu_0) + \mu_0\mu_{00} \geq \mu_0\mu_{00} \geq 0$. Если исключить случай $\mu_0 = \mu_{00} = 0$, то отсюда следует оценка

$z_2 = \dfrac{\mu_0\mu_{00}}{c_{12}\mu_{00} + c_{21}\mu_0 + \mu_0\mu_{00}} \in [0,1]$. Возможны следующие варианты

А) $z_2 = 0 \Leftrightarrow \mu_0\mu_{00} = 0$;

Б) $z_2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} c_{12} = 0 \\ c_{21} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \mu_0 = 1 \\ \Lambda_0 = 0 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} \mu_{00} = 1 \\ \Lambda_{00} = 0 \end{array}\right. \end{cases}$.

Таким образом, $0 < z_2 < 1$, если $\mu_0\mu_{00} > 0$ и $\left[\begin{array}{l} c_{12} \neq 0 \\ c_{21} \neq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \mu_0 < 1 \\ \Lambda_0 > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \mu_{00} < 1 \\ \Lambda_{00} > 0 \end{cases} \end{array}\right.$.

Далее будем считать выполненными эти условия. Характеристический вектор, отвечающий характеристическому числу z_2, с точностью до множителя имеет вид

$\begin{pmatrix} x_{21} \\ x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ \dfrac{\mu_0}{c_{12}}\left(\dfrac{1}{z_2} - 1\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ \dfrac{\mu_0(1-\mu_{00})\Lambda_{00}}{\mu_{00}(1-\mu_0)\Lambda_0} \end{pmatrix}$. Тогда общее решение системы (7)-(8) запишется как

$$\begin{pmatrix} P_1(k) \\ P_2(k) \end{pmatrix} = \beta_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta_2 \begin{pmatrix} -1 \\ \dfrac{\mu_0(1-\mu_{00})\Lambda_{00}}{\mu_{00}(1-\mu_0)\Lambda_0} \end{pmatrix} z_2^k. \tag{12}$$

Постоянные β_1, β_2 найдем из начальных условий (9). Они равны

$$\beta_1 = \alpha_0 + \frac{\alpha_{00} - \alpha_0}{1+\xi}, \beta_2 = \frac{\alpha_{00} - \alpha_0}{1+\xi}, \qquad (13),$$

где $\xi = \frac{\mu_0(1-\mu_{00})\Lambda_{00}}{\mu_{00}(1-\mu_0)\Lambda_0} \geq 0$. Из (12)-(13) следует, что при $\alpha_{00} > \alpha_0$ функция $P_1(k)$ является монотонно убывающей, а $P_2(k)$ монотонно возрастающей, а при $\alpha_{00} < \alpha_0$ наоборот. При $k \to \infty$ обе функции принимают одинаковые значения, равные $\beta_1 = \alpha_0 + \frac{\alpha_{00} - \alpha_0}{1+\xi}$. Если же $\alpha_{00} = \alpha_0 = \alpha$, то $P_1(k) = P_2(k) \equiv \alpha$. Итак,

$$P(\infty) = P_1(\infty) = P_2(\infty) = \beta_1 =$$
$$= \frac{\mu_0(1-\mu_{00})\Lambda_{00}}{\mu_0(1-\mu_{00})\Lambda_{00} + \mu_{00}(1-\mu_0)\Lambda_0}\alpha_0 + \frac{\mu_{00}(1-\mu_0)\Lambda_0}{\mu_0(1-\mu_{00})\Lambda_{00} + \mu_{00}(1-\mu_0)\Lambda_0}\alpha_{00},$$

т.е. является выпуклой комбинацией начальных значений α_0, α_{00}.

Среднее значение членов обеих групп, придерживающихся точки зрения группы майдана, равно

$$M(\infty) = NP(\infty) =$$
$$= N\left[\frac{\mu_0(1-\mu_{00})\Lambda_{00}}{\mu_0(1-\mu_{00})\Lambda_{00} + \mu_{00}(1-\mu_0)\Lambda_0}\alpha_0 + \frac{\mu_{00}(1-\mu_0)\Lambda_0}{\mu_0(1-\mu_{00})\Lambda_{00} + \mu_{00}(1-\mu_0)\Lambda_0}\alpha_{00}\right].$$

Пусть $\alpha_0 = 1, \alpha_{00} = 0$. Например, майдановцы за вступление в ЕС, антимайдановцы против. Тогда $M(\infty) = N\frac{\mu_0(1-\mu_{00})\Lambda_{00}}{\mu_0(1-\mu_{00})\Lambda_{00} + \mu_{00}(1-\mu_0)\Lambda_0}$.

Если $\mu_{00} = 1-\varepsilon$, а μ_0 фиксированная величина, то $M(\infty) = \frac{N\varepsilon\mu_0\Lambda_{00}}{\varepsilon\mu_0\Lambda_{00} + (1-\varepsilon)(1-\mu_0)\Lambda_0} \underset{\varepsilon \to o}{\to} 0$. Т.е., если антимайдановцы не склонны к компромиссу, то вне зависимости от других фиксированных параметров они склонят к своему мнению ($P = 0$) противоположную сторону. Если же и $\mu_0 = 1-\varepsilon$, то $M(\infty) = N\frac{\Lambda_{00}}{\Lambda_{00} + \Lambda_0}$. Теперь победа будет за той группой, которая действует убедительней. Например, при $\Lambda_0 > \Lambda_{00}$ (антимайдановцы убедительней майдановцев) значение $M(\infty) < \frac{N}{2}$, а при $\Lambda_0 \leq \Lambda_{00}$ величина $M(\infty) \geq \frac{N}{2}$.

Предположим теперь, что

$$p_i(0) = \alpha_0 + \varepsilon \cdot \delta p_i(0), i = \overline{1, N_1}, \; p_s(0) = \alpha_{00} + \varepsilon \cdot \delta p_s(0), s = \overline{N_1 + 1, N}. \qquad (14)$$

Обозначим векторы $\mathbf{P}(k)=\left(\underbrace{P_1(k),...,P_1(k)}_{N_1},\underbrace{P_2(k),...,P_2(k)}_{N-N_1}\right)^T$,

$\delta\mathbf{P}(k)=\left(\delta p_1(k),...,\delta p_N(k)\right)^T$.

Теорема 4. *Если все* $\left|\delta p_j(0)\right|<1$*, то решение системы (9)-(10) с начальными условиями (20) имеет вид* $\mathbf{P}(k)+\varepsilon\cdot\delta\mathbf{P}(k)$*, причем все компоненты* $\left|\delta p_i(k)\right|<1.$

Доказательство следует из теоремы 2 первого параграфа.

§3. Задача о Пророке и Лжепророке

Пусть для N человек

$$\lambda_{ij}=\lambda=\frac{1-\Lambda_0-\Lambda_{00}}{N-1}, i\neq j, \lambda_{ii}=0, \Lambda_0\geq 0, \Lambda_{00}\geq 0, \Lambda_0+\Lambda_{00}<1. \qquad (1)$$

Добавим ещё двух участников: Пророка с $\alpha_0=1, \mu_0=1$ и номером 0 и Лжепророка с $\alpha_{00}=0, \mu_{00}=1$ и номером 00. У остальных участников значения $\alpha_i\in(0,1), \mu_i=\mu\in(0,1), i=1,2,...,N$. Будем считать процесс развивающимся во времени, причём $\alpha_i(k+1)=p_i(k), p_i(0)\in[0,1], i=1,2,...,N$. Очевидно, что $p_0(k)\equiv 1, p_{00}(k)\equiv 0$. Тогда уравнения примут вид

$$\begin{aligned}&p_i(k+1)=\mu p_i(k)+(1-\mu)\left(\Lambda_0\cdot 1+\Lambda_{00}\cdot 0\right)+\\&+(1-\mu)\sum_{j=1}^{N}\lambda_{ij}p_j(k+1), i=1,2,...,N.\end{aligned} \qquad (2)$$

Предложение 1. *Для любого* $k=0,1,...$ *решения системы (2)* $p_i(k)\in[0,1]$.

Δ Доказательство вытекает из следствия 1 к теореме 1 первого параграфа. ▲

Обозначим $M(k)=\sum_{i=1}^{N}p_i(k)$ - математическое ожидание числа людей, поддерживающих на k-том шаге идею Пророка. Чтобы получить уравнение для $M(k)$ добавим в обе части уравнений (2) слагаемые $(1-\mu)\lambda p_i(k+1)$ и просуммируем уравнения. Получим

$$M(k+1)+(1-\mu)\lambda M(k+1)=\mu M(k)+N(1-\mu)\Lambda_0+N(1-\mu)\lambda M(k+1),$$

или

$$M(k+1)=\frac{\mu M(k)+N(1-\mu)\Lambda_0}{1-(1-\mu)(1-\Lambda_0-\Lambda_{00})}. \qquad (3)$$

Обозначим $\beta(k)=\frac{M(k)}{N}\in[0,1]$ долю людей, разделяющих идею Пророка. Уравнение (3) можно переписать в новых переменных

$$\beta(k+1)=\frac{\mu\beta(k)+(1-\mu)\Lambda_0}{1-(1-\mu)(1-\Lambda_0-\Lambda_{00})}=\frac{\mu\beta(k)+(1-\mu)\Lambda_0}{\mu+(1-\mu)(\Lambda_0+\Lambda_{00})}. \qquad (4)$$

Пусть

$$q=\frac{\mu}{\mu+(1-\mu)(\Lambda_0+\Lambda_{00})}<1, b=\frac{(1-\mu)\Lambda_0}{\mu+(1-\mu)(\Lambda_0+\Lambda_{00})}<1. \qquad (5)$$

Тогда рекуррентное уравнение (4) примет вид $\beta(k+1)=q\beta(k)+b$, решение которого есть

$\beta(k)=\beta(0)q^k+b\frac{1-q^k}{1-q}$, или

$$\beta(k)=\frac{b}{1-q}+\left[\beta(0)-\frac{b}{1-q}\right]q^k. \qquad (6)$$

Из (5) и (6) с очевидностью следует, что $\beta(k)\underset{k\to\infty}{\to}\frac{b}{1-q}=\frac{\Lambda_0}{\Lambda_0+\Lambda_{00}}\le 1$.

Отметим, что при $\beta(0)<\frac{b}{1-q}=\frac{\Lambda_0}{\Lambda_0+\Lambda_{00}}$ функция (6) монотонно возрастающая, а при $\beta(0)>\frac{\Lambda_0}{\Lambda_0+\Lambda_{00}}$ - монотонно убывающая. Итак, если Пророк убедительнее Лжепророка, ($\Lambda_0>\Lambda_1$), то доля его адептов $\beta(\infty)>0,5$. В частности, если $0<\Lambda_0\le 1, \Lambda_{00}=0$, то $\beta(\infty)=1$, т.е. за Пророком будут следовать *все*, кто слышал его слово. Скорость нарастания числа последователей Пророка зависит от их коэффициента стоицизма μ. Так при $\mu=0$ значение $\beta(1)=\frac{\Lambda_0}{\Lambda_0+\Lambda_{00}}$. Т.е. всего лишь за *одно* явленное им чудо все неверующие ($\beta(0)=0$) становятся в меру верующими, а при $\Lambda_{00}=0$ - абсолютными адептами Пророка. Положим $\mu=0,5$. Пусть $\beta(0)=0$. Тогда неравенство

$\frac{\Lambda_0}{\Lambda_0+\Lambda_{00}}-\beta(k)\le 10^{-n}\Leftrightarrow k\ge\frac{n+\lg\frac{\Lambda_0}{\Lambda_0+\Lambda_{00}}}{-\lg q}$. Положим $\Lambda_0\le 0{,}9;\ \Lambda_{00}=0$, тогда $k\ge\frac{n}{\lg 1{,}9}\approx\frac{n}{0{,}279}=3{,}59n$. Отсюда следует, что за 7 шагов (явленных чудес), 99% людей готовы идти за Пророком.