

## Непрерывные математические модели

- **Обязательный курс** для студентов магистратуры 1 г/о по направлению «Прикладная математика и информатика»
- Читается в 3 семестре, объем 32 часа.
- Курс разработан кафедрами Исследования операций и Автоматизации научных исследований
- Авторы программы: д.ф.-м.н., профессор Белолипецкий Александр Алексеевич, д.ф.-м.н., доцент Сычугов Дмитрий Юрьевич
- **Форма проведения занятий: лекции.**
- **Лектор - д.ф.-м.н., доцент Сычугов Дмитрий Юрьевич**
- **Форма итоговой аттестации – экзамен. Итоговая оценка** определяется по результатам промежуточной отчетности в форме **реферата (презентации)** на тему обзора результатов математического моделирования в той или иной области физики, техники, биологии, экологии, экономики, в гуманитарной сфере, и **оценки устного экзамена.**
- **Примечание.** Наличие реферата является обязательным условием получения отличной оценки.

### Аннотация

Излагаются и обсуждаются методы математического моделирования физических, биологических и экономических процессов. Выводятся уравнения, составляющие основу рассматриваемых моделей. Обсуждаются постановки задач. Подробно изучаются методы решения задач, которые возникают в процессе моделирования этих процессов. Приводится также обзор некоторых результатов в области суперкомпьютерного моделирования.

### Цели и задачи курса

Привить навыки математического моделирования, необходимые исследователю, изучающему те или иные явления физической, биологической, или экономической природы.

### Компетенции, формируемые курсом

Предполагается, что студент, прослушавший курс «Непрерывные математические модели», должен:

- **знать** принципы построения математических моделей в таких классических областях естествознания как физика, биология и экономика;
- уметь выводить уравнения, составляющие основу рассматриваемых в курсе моделей;
- **знать** постановки задач, соответствующих рассматриваемых в курсе моделям;
- **уметь** выбирать базовые переменные и параметры, присущие изучаемому явлению и составлять количественные или иные соотношения между ними;
- **владеть** арсеналом математических инструментов, позволяющих решать возникающие математические проблемы.

### Содержание курса

#### **Часть I. Введение. Основные представления о роли математического моделирования.**

Математическое моделирование в науке как средство изучения природных, инженерных и общественных систем. Типы моделирования. Особенности математического моделирования. Понятие вычислительного эксперимента. Понятие виртуальных аналогов сложных объектов и суперкомпьютерное моделирование. Примеры явлений, которые могут быть изучаемы только методами математического моделирования.

## **Часть II. Математические модели на основе уравнений в частных производных второго порядка.**

Типы линейных уравнений в частных производных второго порядка. Инвариантность типа относительно замены переменных. Уравнения гиперболического, параболического и эллиптического типов. Процессы теплопроводности и диффузии в одномерном и трехмерном случаях. Принцип максимума для уравнения теплопроводности. Корректная постановка краевых задач для уравнений параболического типа. Метод разделения переменных для решения задач теплопроводности в одномерном и трехмерном случаях. Модель цепной реакции в диффузионном приближении, критическая масса. Задача для уравнения теплопроводности на неограниченной прямой и в неограниченном пространстве. Решение задачи Коши для уравнения теплопроводности методом функций Грина.

Процессы, приводящие к уравнениям гиперболического типа. Уравнение колебаний струны. Уравнение продольных колебаний стержня. Уравнения акустики. Уравнения Максвелла и вывод из них волнового уравнения. Постановка задач для уравнения колебаний. Формула Даламбера и скорость распространения волн. Метод разделения переменных для решения задачи о колебаниях струны. Вынужденные колебания, явление резонанса.

Описание стационарного распределения тепла с помощью уравнения эллиптического типа. Уравнения электростатики и магнитостатики. Корректная постановка краевых задач для уравнений эллиптического типа. Метод разделения переменных. Потенциалы.

**Часть III. Математические модели биологии, экологии и социально-экономических процессов.** Модели неограниченного роста популяции и модель с учетом ограниченности ресурса. Модели потребления-восстановления биоресурса. Понятие об устойчивом и неустойчивом стационарных режимах.

Классическая модель Лотки-Вольтерра «хищник-жертва». Режимы установившихся колебаний. Модели трофической цепочки, конкуренции и симбиоза. Обобщенная модель Лотки-Вольтерра. Математическая модель взаимодействия загрязнения с окружающей средой. Математическая модель очистки сточных вод. Учет пространственных распределений в модели Лотки-Вольтерра.

Математическое моделирование социально-экономических систем. Модель динамики популяции (модель Хотеллинга). Модель разделения и сосуществования двух групп населения города. Модель классовой борьбы. Модель боевых действий (модель Ланчестера) и ее модификации.

### **Учебный план курса**

№	Название темы	Лекции (час.)	Контр. раб. (час.)	Самостоят. раб. (час.)
1.	Часть I. Введение. Основные представления о роли математического моделирования	6		5
2.	Часть II. Математические модели на основе уравнений в частных производных второго порядка.	12		9
3.	Часть III. Некоторые математические модели биологии.	12		9
4.	Часть IV. Обзор основных математических моделей социально-экономических процессов	6		5
	Итоговая контрольная работа		2	
	Создание реферата в форме презентации по теме курса		6	
	Итого:	36	8	28
	Всего часов аудиторных занятий и самостоятельной работы студентов		72	

## Оценочные средства

Оценочным инструментом уровня знаний студентов являются:

- 1) Проведение контрольной работы. При выполнении контрольных работ разрешается использование любых пассивных источников информации (книг, учебных пособий, справочников, конспектов лекций)
- 2) Разработка слушателем курса реферата по теме курса и его презентация
- 3) Устный экзамен проводится в форме опроса по вопросам экзаменационных билетов. На устном экзамене никакими вспомогательными материалами пользоваться не разрешается. Экзаменационный билет состоит из двух вопросов. Первый вопрос берется из списка вопросов к **части I**, второй вопрос - из списка вопросов к **части II**.

## Вопросы к экзамену

### А. Вопросы по темам части II.

1. Классификация уравнений в частных производных 2 порядка.
2. Вывод уравнений диффузии и теплопроводности (одномерный и трехмерный случаи).
3. Вывод уравнения цепной реакции в диффузионном приближении.
4. Постановки задач для уравнения теплопроводности на отрезке и в трехмерном параллелепипеде. Физический смысл граничных условий.
5. Принцип максимума для уравнения теплопроводности. Понятие корректно поставленной задачи.
6. Редукция общей краевой задачи для уравнения теплопроводности на отрезке.
7. Решение однородного уравнения теплопроводности на отрезке. Построение функции Грина.
8. Решение однородного уравнения теплопроводности в параллелепипеде.
9. Нахождение величины критической массы для цепной реакции в кубическом реакторе.
10. Решение неоднородной задачи теплопроводности с однородными граничными условиями.
11. Вывод уравнения динамики популяции с учетом двух пространственных переменных.
12. Постановка задачи для уравнения теплопроводности на прямой. Принцип максимума.
13. Функция Грина. Решение задачи Коши для уравнения теплопроводности на прямой.
15. Вывод уравнения колебания струны и продольных колебаний упругого стержня.
16. Вывод уравнения колебания плоской мембраны.
17. Вывод уравнения колебаний в электрическом контуре.
18. Вывод уравнений акустики.
19. Сведение уравнений Максвелла к волновому уравнению.
20. Редукция общей задачи для уравнения колебаний на отрезке.
22. Решение однородного уравнения колебаний струны на отрезке методом разделения переменных.
23. Вынужденные колебания струны при нулевых начальных и граничных условиях.
24. Воздействие периодической внешней силы с частотой, близкой к собственной частоте колебаний системы. Резонанс.

### В. Вопросы по темам части III.

- 25 Уравнение динамики популяции с неограниченным и ограниченным ресурсами. Исследование устойчивости установившихся состояний.
26. Уравнение динамики популяции при наличии отлова. Исследование устойчивости установившихся состояний.

27. Вывод уравнения динамики популяции с учетом одной и двух пространственных переменных.

28. Классическая модель Лотки-Вольтерра. Явление периодических колебаний численности популяций.

29. Обобщение модели Лотки-Вольтерра.

30. Система уравнений трофической цепочки.

31. Модель «хищник-жертва» с учетом внутривидовой конкуренции.

32. Модели конкуренции и симбиоза.

33. Модель «мертвой» очистки загрязнений.

34. Модель взаимодействия загрязнения и окружающей среды.

35. Математическая модель очистки сточных вод.

36. Простейшая модель классовой борьбы.

37. Математическая модель очистки сточных вод.

38. Модель разделения и сосуществования двух групп населения города.

39. Классическая модель Ланчестера и ее модификации.

### **Список литературы**

1. А.Н.Тихонов, А.А.Самарский. Уравнения математической физики. – М., Наука, 1977, 735 с.
2. Е.В.Захаров, И.В.Дмитриева, С.И.Орлик. Уравнения математической физики. – М., изд. центр «Академия», 2010, 315 с.
3. А.А.Самарский, А.П.Михайлов. Математическое моделирование. – М., Физматлит, 2001.
4. Т.Пу. Нелинейная экономическая динамика. Научно-издательский центр. «Регулярная и хаотическая динамика», г. Ижевск, 2002., 198с.
5. П.С.Краснощеков, А.А.Петров. Принципы построения моделей. – М.: МГУ, 1983.
6. Д.И.Трубецков. Феномен математической модели Лотки-Вольтерры и сходных с ней. Изв. вузов «ПНД», т.19. № 1, 2011, стр. 69-87.