УДК 519.8+519.7

ДИНАМИЧЕСКИЙ ВАРИАНТ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ КОЛЛЕКТИВНОГО ПОВЕДЕНИЯ

Белолипецкий А.А.

Кафедра исследования операций факультета ВМиК МГУ им. М.В.Ломоносова

В 2014 году академик РАН П.С.Краснощеков в одной из бесед предложил мне продолжить исследования коллективного поведения людей, обобщив предложенную им ранее статическую модель на динамический случай. Поэтому настоящую работу я рассматриваем как дань памяти этому выдающемуся ученому. В основополагающей количественной модели, предложенной в работах П.С. Краснощекова, исследована статическая модель коллективного поведения, когда люди в результате одного этапа информационного взаимодействия могут изменить свое первоначальное мнение по какому-то вопросу. Мнения предполагаются альтернативными. Человек с вероятностью p может быть, например, за то, чтобы его страна вступила в ВТО, и с вероятностью $1-p$ против этого вступления. В данной работе рассматриваются многошаговые процессы обмена мнениями. Получены количественные характеристики значений вероятностей p, (мнений людей), как функции номера шага и скорости изменения этих вероятностей. Например, исследовано, как СМИ могут управлять мнением своих объектов информационной обработки, если данные объекты обладают определенными психологическими характеристиками.

0. Введение

В последние три десятилетия начали интенсивно развиваться исследования, посвященные коллективному поведению людей в тех или иных ситуациях [1]-[13]. В части из них рассматриваются психологические и социологические аспекты поведения коллективов, в других работах внимание акцентируется на количественных оценках, описывающих поведение индивидуумов и коллективов в целом

Приведем краткое описание статической модели коллективного поведения, предложенной П.С. Краснощековым в работах [1]-[3]. Пусть ЛПР (лицо, принимающее решение) может принять одно из двух $S = 1,2$ альтернативных решений. Вероятность того, что i -й индивид, $i = \overline{1,N}$, примет решение с номером $s = 1$ равно $p_i \in [0,1]$, а с номером $s = 2$ равно $1 - p_i$.

Пусть μ_i есть коэффициент индивидуализма i -го ЛПР. При $\mu = 1$ данное ЛПР абсолютно самостоятельно и его нельзя заставить изменить решение, а при $\mu = 0$ - это абсолютный конформист, меняющий решения в угоду любому чужому мнению. Пусть $\lambda_{ij} \in [0,1]$ - вероятность того, что i - е ЛПР примет решение $s = 1$ после общения с j -м ЛПР, при условии, что j -е ЛПР придерживается $s = 1$-й альтернативы. Тогда для полного конформиста ($\mu = 0$) вероятность того, что после общения с коллективом им будет принято решение $s = 1$ по формуле полной вероятности запишется как

$p_i^0 = \sum_{j=1}^{N} \lambda_{ij} p_j$. Очевидно, что $\lambda_{ii} = 0$, т.к. собственное мнение для конформиста не имеет веса, и, если все $p_j = 1,\ j \neq i$, то $p_i^0 = 1$ (коллектив всегда убедит конформиста принять точку зрения «общества»). Следовательно,

$$\sum_{j=1}^{N}\lambda_{ij}=1,\, i=\overline{1,N}\,.$$

Если же i -е ЛПР самостоятельно в принятии решения ($\mu=1$), то соответствующая вероятность будет равна некоторой априорной вероятности α_i. Для промежуточных значений $\mu\in(0,1)$ имеет смысл вычислять апостериорную вероятность в виде выпуклой комбинации

$$p_i=\mu_i\alpha_i+(1-\mu_i)\,p_i^0=\mu_i\alpha_i+(1-\mu_i)\sum_{j=1}^{N}\lambda_{ij}\,p_j\,.$$

1.Постановка задачи и свойства ее решений

Обобщим статическую модель, описанную выше. Если считать, что величины $p_i(t)$ являются функциями непрерывного времени t, то описанная выше модель может быть записана в виде системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dp_i(t)}{dt}=\mu_i(\alpha_i-p_i(t))+(1-\mu_i)\sum_{j=1}^{N}\lambda_{ij}\left(p_j(t)-p_i(t)\right).$$

Обоснование и свойства этой системы изучены в работе [12]. Нетрудно видеть, что стационарные решения этой системы удовлетворяют уравнениям статической модели П.С.Краснощекова.

Ниже будет рассмотрен ее динамический аспект. Для этого положим время (шаг) дискретным $t_k=k=0,1,2,\ldots$, и предположим, что априорное решение на данном шаге равно апостериорному значению, полученному на предыдущем шаге. Далее для краткости будем вместо $p(t_k)$ писать $p(k)$. Теперь модель примет вид системы линейных, однородных разностных уравнений

$$p_i(k+1) = \mu_i p_i(k) + (1-\mu_i)\sum_{j=1}^{N} \lambda_{ij} p_j(k+1), \ i = \overline{1,N} \qquad (1.1)$$

с параметрами

$$\mu_i \in [0,1], \lambda_{ij} > 0, i \neq j, \lambda_{ii} = 0, \sum_{j=1}^{N} \lambda_{ij} = 1. \qquad (1.2)$$

Требуется найти функции $p_i(k)$, при заданных начальных условиях $p_i(0)$, $i = \overline{1,N}$.

В работе [1] рассматривались два примера (переговоры и выборы), где изучались частные случаи динамических соотношений (1.1). Ниже будут получены общие свойства решений системы (1.1).

Пусть $\mathbf{p} = \left(p_1,..., p_N\right)^T$, $\Lambda = \left(\lambda_{ij}\right), i, j = \overline{1,N}$,

$\mathrm{M} = diag(\mu_1,...,\mu_N), \mu_1 + ... + \mu_N > 0$, диагональная матрица, E - единичная матрица. Тогда систему (1.1) можно записать в векторном виде

$$(E - A)\mathbf{p}(k+1) = \mathrm{M}\mathbf{p}(k), \text{ где} \qquad (1.3)$$

$$A = (E - \mathrm{M})\Lambda. \qquad (1.4)$$

Определение 1. 1. Квадратная матрица $A\left(N \times N\right)$ называется разложимой, если одновременной перестановкой строк и столбцов ее можно представить в виде $\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{bmatrix}$, где $A_1\left(m \times m\right)$, $A_3\left(\left(N-m\right)\times\left(N-m\right)\right), m < N$.

Предложение 1.1. *Если матрица A разложима, то и матрица A^2 разложима, причем* $A^2 = \begin{bmatrix} A_1^2 & \tilde{A}_2 \\ 0 & A_3^2 \end{bmatrix}$.

Доказательство следует из определения 1.1.

Предложение 1.2. *Если все* $\mu_i < 1$*, то матрица (1.4) неразложима.*

Δ Пусть $a_{ij}^{(2)}$ произвольный элемент матрицы A^2, стоящий на пересечении i-й строки и j- го столбца. Из (4) следует, что $a_{ij}^{(2)} = \sum_{k=1}^{N}(1-\mu_i)\lambda_{ik}(1-\mu_k)\lambda_{kj}$. Из (1.2) и условия предложения следует, что $a_{ij}^{(2)} > 0$. Отсюда и из предложения 1.1 получаем справедливость утверждения ▲

Теорема (Фробениуса-Перрона). *Если неотрицательная матрица* A *неразложима, то у нее существует собственное число* λ_A *такое, что для любого другого собственного числа* λ *справедливо* $|\lambda| < \lambda_A$*, а соответствующий правый собственный вектор- столбец* $\mathbf{x}_A$ *,* $(A\mathbf{x}_A = \lambda_A\mathbf{x}_A)$*, и левый собственный вектор- строка* $\mathbf{y}_A$*,* $(\mathbf{y}_A A = \lambda_A \mathbf{y}_A)$*, положительны.*

Доказательство теоремы можно найти, например, в [14], [15].

Определение 1.2. Собственное число λ_A называют фробениусовым числом, а векторы $\mathbf{x}_A$, $\mathbf{y}_A$ - правым и левым фробениусовыми векторами.

Пусть $r = \min_{i=\overline{1,N}} r_i$, $R = \max_{i=\overline{1,N}} r_i$, где $r_i = \sum_{j=1}^{N} a_{ij}$.

Предложение 1.3. *Если* A *неотрицательная неразложимая матрица, то при* $r < R$ *ее фробениусово число* $r < \lambda_A < R$*. Если же* $r = R$*, то* $\lambda_A = R$*.*

Доказательство можно найти в [15].

Определение 1.3. Неотрицательную матрицу A назовем продуктивной, если существует неотрицательная матрица $\left(E-A\right)^{-1}$.

Предложение 1.4. *Неотрицательная неразложимая матрица* A*продуктивна тогда и только тогда, когда ее фробениусово число* $\lambda_A < 1$.

Доказательство можно найти в [15].

Предложение 1. 5. *Если* $\sum_i^N \mu_i > 0$*, то фробениусово число матрицы (1.4) меньше единицы.*

Δ Сумма элементов i-й строки матрицы (1.4) равна $r_i = (1-\mu_i)\sum_{j=1}^N \lambda_{ij} = (1-\mu_i) \le 1$.

Следовательно и $r = \min_{i=\overline{1,N}} r_i > 0, \quad R = \max_{i=\overline{1,N}} r_i \le 1$. Если $r < R$, то из предложения 1.3 следует, что $\lambda_A < R \le 1$. Если же $r = R$, то все $r_i = R = 1 - \mu < 1$. Из предложения 1.3 тогда следует равенство $\lambda_A = R < 1$ ▲

Лемма 1.1. *Если все параметры* $\mu_i < 1$, *то система уравнений (1.3), а значит и система (1.1) однозначно разрешимы и справедливы рекуррентные соотношения*

$$\mathbf{p}(k+1) = (E-A)^{-1}\mathrm{M}\mathbf{p}(k). \tag{1.5}$$

Если же при этом $\mathbf{p}(k) \ge 0$*, то и* $\mathbf{p}(k+1) \ge 0$.

Δ Из условий леммы и предложения 1.2 следует, что неотрицательная матрица A неразложима, а из предложения 1.5 заключаем, что её фробениусово число λ_A меньше единицы. Тогда предложение 1.4 гарантирует продуктивность матрицы $E - A$. То есть уравнение (1.3) имеет решение (1.5) ▲

Для произвольного $k = 0,1,2,...$ обозначим

$$\pi_{\max}(k) = \max_{1 \le j \le N} p_j(k), \pi_{\min}(k) = \min_{1 \le j \le N} p_j(k).$$

Лемма 1.2. *Для любой положительной матрицы* $\Lambda = \left(\lambda_{ij}\right), i, j = \overline{1, N}$*, у которой сумма элементов в любой строке равна единице, а все её диагональные элементы равны нулю и значений* $\mu_1, ..., \mu_N \in [0,1], \mu_1 + ... + \mu_N > 0$*, решения уравнения (1.1) таковы, что выполняются неравенства*

$$\pi_{\max}(k+1) \le \pi_{\max}(k), \pi_{\min}(k+1) \ge \pi_{\min}(k) \tag{1.6}$$

Более того, существует $\varepsilon_0 \in (0,1)$*, для которого справедливо неравенство*

$$\pi_{\max}(k) - \pi_{\min}(k) \le \varepsilon_0^k \left(\pi_{\max}(0) - \pi_{\min}(0)\right). \tag{1.7}$$

Δ 1. Если $\pi_{\max}(k) = \pi_{\min}(k) = p$, то все $p_i(k) = \pi_{\max}(k) = \pi_{\min}(k) = p, i = \overline{1, N}$. Но в этом случае и все $p_i(k+1) = p, i = \overline{1, N}$. В последнем легко убедиться, подставив значения $p_i(k+1) = p_i(k) = p$ в уравнения (1.1). В силу леммы 1.1 эта система однозначно разрешима. То есть $p_i(k+1) = p$ единственное решение. В этом случае лемма очевидна.

2. Итак, считаем, что $\pi_{\max}(k+1) > \pi_{\min}(k+1)$. Пусть $p_m(k+1) = \pi_{\max}(k+1)$. Можно считать, что $\mu_m > 0$. Действительно, если $\mu_m = 0$, то из (1.1) получаем равенство $\pi_{\max}(k+1) = \sum_{j=1}^{N} \lambda_{m\,j} p_j(k+1)$. Последнее, в силу свойств матрицы Λ, возможно только, если все $p_j(k+1) = \pi_{\max}(k+1)$, а это противоречит нашему предположению. Далее,

пусть $p_h(k+1)=\pi_{\min}(k+1)$. Как было только что показано, можно считать, что $\mu_h>0$.

Тогда из (1.1) получаем

$$
\begin{aligned}
&\mu_m p_m(k)=\pi_{\max}(k+1)-(1-\mu_m)\sum_{j=1}^{N}\lambda_{m\,j}p_j(k+1)=\mu_m\pi_{\max}(k+1)+\\
&+(1-\mu_m)\sum_{j=1}^{N}\lambda_{m\,j}\left(\pi_{\max}(k+1)-p_j(k+1)\right)=\\
&=\mu_m\pi_{\max}(k+1)+(1-\mu_m)\lambda_{m\,h}\left[\pi_{\max}(k+1)-\pi_{\min}(k+1)\right]+\\
&+(1-\mu_m)\sum_{j=1,\,j\neq h}^{N}\lambda_{m\,j}\left(\pi_{\max}(k+1)-p_j(k+1)\right)\geq\\
&\geq\mu_m\pi_{\max}(k+1)+(1-\mu_m)\lambda_{m\,h}\left[\pi_{\max}(k+1)-\pi_{\min}(k+1)\right].
\end{aligned}
$$

Отсюда и из неравенства $p_m(k)\leq\pi_{\max}(k)$ получаем

$$
\pi_{\max}(k)-\pi_{\max}(k+1)\geq\frac{(1-\mu_m)\lambda_{m\,h}}{\mu_m}\left[\pi_{\max}(k+1)-\pi_{\min}(k+1)\right]. \qquad (1.8)
$$

Следовательно, $\pi_{\max}(k+1)<\pi_{\max}(k)$.

Оценим

$$
\begin{aligned}
&\mu_h p_h(k)=\pi_{\min}(k+1)-(1-\mu_h)\sum_{j=1}^{N}\lambda_{h\,j}p_j(k+1)=\\
&=\mu_h\pi_{\min}(k+1)+(1-\mu_h)\sum_{j=1}^{N}\lambda_{h\,j}(\pi_{\min}(k+1)-p_j(k+1))=\\
&=\mu_h\pi_{\min}(k+1)+(1-\mu_h)\lambda_{h\,m}\left[\pi_{\min}(k+1)-\pi_{\max}(k+1)\right]+
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+(1-\mu_h)\sum_{j=1,\,j\neq m}^{N}\lambda_{h\,j}(\pi_{\min}(k+1)-p_j(k+1))\leq\\
&\leq\mu_h\pi_{\min}(k+1)+(1-\mu_h)\lambda_{h\,m}\left[\pi_{\min}(k+1)-\pi_{\max}(k+1)\right].
\end{aligned}
$$

Отсюда, и из неравенства $p_h(k)\geq\pi_{\min}(k)$ получаем

$$\pi_{\min}(k+1)-\pi_{\min}(k)\geq\frac{(1-\mu_h)\lambda_{h\,m}}{\mu_h}\left[\pi_{\max}(k+1)-\pi_{\min}(k+1)\right]. \qquad (1.9)$$

Следовательно $\pi_{\min}(k+1)-\pi_{\min}(k)>0$. Неравенства (1.6) доказаны. Сложим левые и правые части неравенств (1.8), (1.9). Получим

$$\left(\pi_{\max}(k)-\pi_{\min}(k)\right)-\left(\pi_{\max}(k+1)-\pi_{\min}(k+1)\right)\geq$$
$$\geq\left[\frac{(1-\mu_m)\lambda_{mh}}{\mu_m}+\frac{(1-\mu_h)\lambda_{h\,m}}{\mu_h}\right]\left[\pi_{\max}(k+1)-\pi_{\min}(k+1)\right]\geq$$
$$\geq 2c\left[\pi_{\max}(k+1)-\pi_{\min}(k+1)\right],$$

где $c=\min\limits_{\mu_i>0}\frac{(1-\mu_i)}{\mu_i}\cdot\min\limits_{i\neq j}\lambda_{ij}>0$. Отсюда следует, что

$\left(\pi_{\max}(k)-\pi_{\min}(k)\right)\geq(1+2c)\left[\pi_{\max}(k+1)-\pi_{\min}(k+1)\right]$ или

$\left(\pi_{\max}(k+1)-\pi_{\min}(k+1)\right)\leq\varepsilon\left[\pi_{\max}(k)-\pi_{\min}(k)\right]$, где $\varepsilon=(1+2c)^{-1}<1$. Последнее неравенство гарантирует справедливость оценки (1.7)▲

Следствие 1. *Все значения* $p_i(k)\xrightarrow[k\to\infty]{}p^*,\ i=\overline{1,N}$.

Теорема 1.1. *Если выполнены условия леммы 1.2 и все компоненты* $p_i(0)\in[a,b]$*, то и все компоненты* $p_i(k)\in[a,b],\ k=1,2,\ldots$.

Доказательство следует из леммы 1.2.

В частности, справедливы

Следствие 1. *Если все компоненты* $p_i(0)\in[0,1]$*, то и все компоненты* $p_i(k)\in[0,1]$*,* $k=1,2,\ldots$.

Следствие 2. *В одношаговой модели, где* $p_i(0) = \alpha_i \in [0,1],\ p_i(1) = p_i,\ i = \overline{1,N}$*, все значения* $p_i \in [0,1]$.

Исследуем систему разностных уравнений (1.1) на устойчивость к возмущению начальных условий. Пусть $p_i(k)$ - решения системы (1.1) при заданных начальных условиях $p_i(0)$, $i = \overline{1,N}$, а $p_i(k) + \delta p_i(k)$ - решения системы (1.1) при возмущенных начальных условиях $p_i(0) + \delta p_i(0)$, $i = \overline{1,N}$.

Теорема 1.2 (об устойчивости). *Решения системы уравнений (1.1) устойчивы к возмущениям начальных условий. Иными словами, если все возмущения* $\delta p_i(0) \in [-\varepsilon, \varepsilon],\ \varepsilon > 0$*, то и все вариации* $\delta p_i(k) \in [-\varepsilon, \varepsilon]$, $i = \overline{1,N}$, $k = 1, 2, \ldots$.

Δ В силу линейности соотношений (1.1) уравнения для вариаций $\delta p_i(k)$ имеет тот же вид, что и (1), т.е. $\delta p_i(k+1) = \mu_i \cdot \delta p_i(k) + (1-\mu_i)\sum_{j=1}^{N} \lambda_{i\,j} \cdot \delta p_j(k+1)$, $i = \overline{1,N}$.

Отсюда и из теоремы 1.1 следует утверждение теоремы 1.2 ▲

Рассмотрим две матрицы $C = \left(c_{ij}\right), D = \left(d_{ij}\right)$ обе размера $N \times N$ и комплексное число z. Пусть $C(z) = \left(c_{ij} z^{\varsigma_{ij}}\right), D(z) = \left(d_{ij} z^{\xi_{ij}}\right)$, где параметры ς_{ij}, ξ_{ij} могут принимать лишь значения ноль или единица. Будем искать нетривиальное решение однородной системы линейных уравнений

$$\left(C(z) - D(z)\right)\mathbf{x} = 0. \qquad (1.10)$$

Необходимым и достаточным условием существования такого решения является условие

$$\det\left(C(z) - D(z)\right) = 0. \qquad (1.11)$$

Характеристическое уравнение (1.11) является алгебраическим уравнением степени не выше N. Корень z^* уравнения (1.11) назовём обобщенным характеристическим числом уравнения (1.10), а соответствующее ему решение $\mathbf{x}^*$ характеристическим вектором этого уравнения. Очевидно, что характеристический вектор определён с точностью до множителя.

Теорема 1.3. *Если сумма элементов любой строки матрицы* $C(1)$ *равняется сумме элементов той же строки матрицы* $D(1)$*, то уравнение (1.11) имеет корень* $z^*=1$ *с соответствующим ему характеристическим вектором* $\mathbf{x}^*$*, все компоненты которого равны единице.*

Δ При сделанных предположениях сумма столбцов матрицы $C(1)-D(1)$ равна нулю, т.е. $\det\left(C(1)-D(1)\right)=0$. Следовательно, $z^*=1$ есть обобщенное характеристическое число уравнения (1.10). Положим $\mathbf{x}^*=(1,1,\ldots,1)^T$. Тогда любое из уравнений системы (1.10) запишется как $\sum_{j=1}^{N}(c_{ij}-d_{ij})x_j^*=\sum_{j=1}^{N}(c_{ij}-d_{ij})=0$. Т.е. $\mathbf{x}^*$ - характеристический вектор, соответствующий обобщенному характеристическому числу $z^*=1$ ▲

Рассмотрим матрицу

$$G(z)=(E-A)z-\mathrm{M}. \qquad (1.12)$$

Лемма 1.4. *Матрица (1.12) имеет обобщенное характеристическое число* $z=1$ *и соответствующий характеристический вектор* $\mathbf{x}=(1,1,\ldots,1)^T$*. Для любого числа* z *матрицы* $C(z)=\left(E-A\right)z$ *и* $D(z)=\mathrm{M}$ *удовлетворяют условиям теоремы 1.3.*

Δ Сумма элементов i -й строки матрицы $C(z)=\left(E-A\right)z$ согласно (1.4) равна

$z-z(1-\mu_i)\sum_{j=1}^{N}\lambda_{ij}=z-z(1-\mu_i)=z\mu_i$, а соответствующая сумма элементов матрицы

$D(z)=\mathrm{M}$ равна μ_i. При $z=1$ они совпадают. Отсюда и из теоремы 1.3 следует утверждение леммы ▲

Теорема 1.4. *Пусть* z *- обобщенное характеристическое число, а* $\mathbf{x}$ *соответствующий ему характеристический вектор матрицы (1.12). Тогда функция* $\mathbf{p}(k)=z^k\mathbf{x}$ *является решением уравнения (1.3).*

Δ Подставив выражение $\mathbf{p}(k)=z^k\mathbf{x}$ в уравнение (1.3), получим систему уравнений $G(z)\mathbf{x}=0$. Теперь утверждение следует из условия теоремы ▲

Теорема 1.5. *Все действительные обобщенные характеристические числа матрицы* $G(z)=(E-A)z-\mathrm{M}$ *по модулю не превосходят 1, а ее характеристические векторы, отвечающие характеристическим числам* $z\neq 1$*, обязаны иметь либо компоненты разных знаков, либо нулевые компоненты.*

Δ 1.Пусть $z>0$. Поскольку действительный характеристический вектор $\mathbf{x}$ нетривиален и определен с точностью до множителя, то будем считать, что его максимальная компонента положительна. Пусть это будет x_1. Без ограничения общности его минимальная компонента есть x_2. По теореме 1.4 $\mathbf{p}(k)=z^k\mathbf{x}$. Рассмотрим векторы $\mathbf{p}(0)=\mathbf{x}, \mathbf{p}(1)=z\mathbf{x}$. Очевидно, что первая и вторая компоненты этих векторов являются максимальной и минимальной соответственно. По лемме 1.2 $p_1(1)=zx_1\leq p_1(0)=x_1$. Отсюда следует, что $z<1$. Из той же леммы получаем $p_2(1)=zx_2\geq p_2(0)=x_2$. Отсюда и из неравенства $z<1$ следует, что $x_2\leq 0$.

2. Если $z<0$, то максимальная компонента у вектора $\mathbf{p}(1)$ есть zx_2, а минимальная zx_1. В силу леммы 1.2 имеем $x_1 \geq zx_2,\ x_2 \leq zx_1$. Т.к. $x_1>0,\ z<0$, то из обоих неравенств следует, что $x_2 \leq 0$. Если $x_2 \neq 0$, то из обоих неравенств вытекает $z \geq \dfrac{x_2}{x_1},\ z \geq \dfrac{x_1}{x_2}$.

Поскольку либо $\dfrac{x_2}{x_1} \geq -1$, либо $\dfrac{x_1}{x_2} \geq -1$, то $z \geq -1$ ▲

Теорема 1.6. *Если все* $\mu_i < 1,\ i=\overline{1,N}$*, то все обобщенные характеристические числа и характеристические векторы матрицы (1.12) являются собственными числами и собственными векторами матрицы*

$$L=(E-A)^{-1}\mathrm{M}. \tag{1.13}$$

Доказательство следует из леммы 1.1.

Теорема 1.7. *Если* $\sum_{i=1}^{N}\mu_i > 0,\ \mu_i \in [0,1)$*, то значение* $z=-1$ *не является обобщенным характеристическим числом матрицы (1.12), а значит и собственным числом матрицы (1.13).*

Δ Предположим противное. Тогда для соответствующего характеристического вектора $\mathbf{x}$ получим $G(-1)\mathbf{x}=\mathbf{0}$ или

$$-x_i+(1-\mu_i)\sum_{j=1}^{N}\lambda_{ij}x_j-\mu_i x_i=0,\ \overline{i=1,N}. \tag{1.14}$$

Так как $\mathbf{x}$ нетривиальный действительный вектор, то можно считать, что его максимальная координата положительна. Проведя рассуждения аналогичные тем, что были приведены при доказательстве леммы 1.2, можно показать, что среди максимальных координат найдется координата с номером m, для которой $\mu_m > 0$. Мажорируя левую часть (1.14), имеем

$$-x_m+(1-\mu_m)x_m\sum_{j=1}^{N}\lambda_{m\,j}-\mu_m x_m \ge -x_m+(1-\mu_m)\sum_{j=1}^{N}\lambda_{mj}x_j-\mu_m x_m=0.\text{ Или } 2\mu_m x_m \le 0.$$

Последнее невозможно, т.к. $x_m > 0$ ▲

<u>Предположение 1.</u> *Все собственные числа матрицы (1.13) имеют кратность единица.*

Если это так, то все они вместе с вектором $\mathbf{x}^*=(1,1,\ldots 1)^T$ образуют базис в N-мерном комплексифицированном пространстве. Пусть эти собственные числа равны $z_1=1, z_2, z_3,\ldots,z_N$, а соответствующие им собственные векторы $\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\mathbf{x}_3,\ldots,\mathbf{x}_N$, причем $\mathbf{x}_1=\mathbf{x}^*=(1,1,\ldots 1)^T$. Тогда общее решение уравнения (1.3) примет вид

$$\mathbf{p}(k)=y_1\mathbf{x}^*+\sum_{i=2}^{N}y_i\mathbf{x}_i z_i^k, \tag{1.15}$$

где y_i произвольные постоянные. Они определяются начальными условиями

$$\mathbf{p}(0)=y_1\mathbf{x}^*+\sum_{i=2}^{N}y_i\mathbf{x}_i\,. \tag{1.16}$$

Система уравнений (1.16) разрешима в силу вышесказанного. Если все собственные числа $z_i,\ i=\overline{1,N},$ матрицы (1.13) действительны, то из теорем 1.5-1.7 следует, что $|z_i|<1, \overline{i=2,N}$. Отсюда и из (1.15) получаем

$$\lim_{k\to\infty}\mathbf{p}(k)=y_1\mathbf{x}^*.$$

2. Модификация модели на случай разномасштабных времен реакции участников коллектива на изменение своего мнения

Видоизменим модель (1.1). Запишем (1.1) в виде

$$p_i(k+1) - p_i(k) = (1-\mu_i)\sum_{j=1}^{N}\lambda_{i\,j}\,[p_j(k+1) - p_i(k)],\ i=\overline{1,N}\,. \qquad (2.1)$$

Предположим, что разные члены коллектива реагируют на изменение своего мнения с разным темпом. То есть существует хотя бы один индивидуум с максимальной скоростью реакции, которую мы примем за 1. Остальные члены коллектива имеют индивидуальную скорость $\tau_i \in [0,1]$. Теперь (2.1) примет вид

$$p_i(k+1) - p_i(k) = \tau_i(1-\mu_i)\sum_{j=1}^{N}\lambda_{i\,j}\,[p_j(k+1) - p_i(k)],\ i=\overline{1,N}\,. \qquad (2.2)$$

Теорема 2.1. *Система уравнений (2.2) может быть записана в виде*

$$p_i(k+1) = \tilde{\mu}_i p_i(k) + (1-\tilde{\mu}_i)\sum_{j=1}^{N}\lambda_{i\,j}\,p_j(k+1), i=\overline{1,N}\,, \qquad (2.3)$$

где $\tilde{\mu}_i(\mu_i,\tau_i) = 1-\tau_i(1-\mu_i) \in [0,1]$. *Очевидно, что*

$\tilde{\mu}_i(0,\tau_i) = 1-\tau_i,\ \tilde{\mu}_i(1,\tau_i) = 1,\ \tilde{\mu}_i(\mu,0) = 1,\ \tilde{\mu}_i(\mu,1) = \mu$.

Δ Перепишем (2.2) в виде

$$p_i(k+1) = p_i(k) + \tau_i(1-\mu_i)\left[\sum_{j=1}^{N}\lambda_{i\,j}\ p_j(k+1) - \sum_{j=1}^{N}\lambda_{i\,j}\ p_i(k)\right] =$$

$$p_i(k+1) = p_i(k) + \tau_i(1-\mu_i)\left[\sum_{j=1}^{N}\lambda_{i\,j}\ p_j(k+1) - p_i(k)\right] =$$

$$= [1-\tau_i(1-\mu_i)]p_i(k) + \tau_i(1-\mu_i)\sum_{j=1}^{N}\lambda_{i\,j}\ p_j(k+1)\,. \qquad (2.4)$$

Здесь было использовано равенство (1.2). Положим $\tilde{\mu}_i(\mu_i,\tau_i)=1-\tau_i(1-\mu_i)$. Тогда $(1-\mu_i)=\dfrac{1-\tilde{\mu}_i}{\tau_i}$. Подставим эти выражения в (2.4) и получим искомое ▲

Из теоремы 2.1 следует, что даже при наличии разных темпов реакции индивидуумов на изменения, уравнения (2.3) имеют тот же вид (1.1), следовательно, и в данной модели свойства решений, описанные в §1, сохраняются.

3. Задача о борьбе двух парламентских фракций

В рамках изложенной выше теории рассмотрим следующую гипотетическую задачу. Пусть парламент некоторой страны рассматривает вопрос о принятии важного для народа этой страны закона, например, английский парламент рассматривает вопрос о выходе из ЕС. Предположим, что члены парламента разделились на две фракции. Одна в основном за принятие этого закона, вторая – против. Назовем первую фракцию «Виги», а вторую «Тори». В парламенте возникают дебаты по этому вопросу, которые могут идти в несколько этапов. В результате этих дебатов мнения членов фракций меняются. Вопрос заключается в том, как скоро и к какому мнению придут члены парламента.

Для получения математически содержательного ответа разобьём группу из N парламентариев на две подгруппы: в первой, $i=\overline{1,N_1}$, члены группы имеют $\mu_i=\mu_0$ (Виги); во второй, $s=N_1+1,\ldots,N$, они имеют $\mu_s=\mu_{00}$ (Тори). При этом «коэффициенты влияния» членов обеих групп друг на друга таковы:

1.Для всех $i=\overline{1,N_1},\ \lambda_{ii}=0$, а

$$\lambda_{ij}=\frac{1-\Lambda_0}{N_1-1},\ \ j=\overline{1,N_1},\ \lambda_{ij}=\frac{\Lambda_0}{N-N_1},\ \ j=\overline{N_1+1,N}\ ; \tag{3.1}$$

2. Для всех $s=\overline{N_1+1,N}$, $\lambda_{ss}=0$, а

$$\lambda_{sj}=\frac{\Lambda_{00}}{N_1},\;\; j=\overline{1,N_1},\, \lambda_{sj}=\frac{1-\Lambda_{00}}{N-N_1-1},\;\; j=\overline{N_1+1,N}\;\; . \tag{3.2}$$

Коэффициенты $\mu_0,\,\mu_{00},\,\Lambda_0,\,\Lambda_{00}\in[0,1]$. При этом Λ_0 - это коэффициент влияния членов второй группы на мнение членов первой группы. Т.е. чем больше значение Λ_0, тем с большей вероятностью член второй группы склонит к своему мнению члена первой группы. Аналогично, Λ_{00} - коэффициент влияния членов первой группы на мнение членов второй группы. Очевидно следующее утверждение.

Предложение 3.1. *В неотрицательной матрице* $\Lambda=\left(\lambda_{pr}\right),\; p,r=\overline{1,N}$ *сумма элементов в любой строке равна единице, а все её диагональные элементы равны нулю.*

Разностные уравнения (3.1)-(3.2) запишем в виде

$$\begin{aligned} p_i(k+1)&=\mu_0 p_i(k)+(1-\mu_0)\frac{1-\Lambda_0}{N_1-1}\sum_{j=1}^{N_1}(1-\delta_{ij})p_j(k+1)+\\ &+(1-\mu_0)\frac{\Lambda_0}{N-N_1}\sum_{j=N_1+1}^{N}p_j(k+1),\, i=\overline{1,N_1}, \end{aligned} \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned} p_s(k+1)&=\mu_{00} p_s(k)+(1-\mu_{00})\frac{\Lambda_{00}}{N_1}\sum_{j=1}^{N_1}p_j(k+1)+\\ &+(1-\mu_{00})\frac{1-\Lambda_{00}}{N-N_1-1}\sum_{j=N_1+1}^{N}(1-\delta_{sj})p_j(k+1),\, s=\overline{N_1+1,N}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Ниже будем считать выполненными следующие условия: параметры $\mu_0,\,\mu_{00}\in(0,1)$ и $\Lambda_0,\,\Lambda_{00}\in(0,1)$. Тогда система разностных уравнений (3.3)-(3.4) удовлетворяет условиям леммы 1.1, следовательно, при заданных начальных условиях она имеет единственное решение.

Для получения аналитических результатов вначале предположим, что все

$$p_i(0) = \alpha_0,\ i = \overline{1, N_1},\ p_s(0) = \alpha_{00},\ s = \overline{N_1 + 1, N}. \qquad (3.5)$$

Покажем, что решение (3.3)-(3.4) имеет вид

$$p_i(k) = P_1(k),\ i = \overline{1, N_1},\ p_s(k) = P_2(k),\ s = \overline{N_1 + 1, N}. \qquad (3.6)$$

Действительно, будем искать решение в виде (3.6) с начальными условиями (3.5). Из (3.3)-(3.5) сразу следуют уравнения для P_1, P_2:

$$P_1(k+1) = \mu_0 P_1(k) + (1-\mu_0)(1-\Lambda_0)P_1(k+1) + (1-\mu_0)\Lambda_0 P_2(k+1), \qquad (3.7)$$

$$P_2(k+1) = \mu_{00} P_2(k) + (1-\mu_{00})\Lambda_{00} P_1(k+1) + (1-\mu_{00})(1-\Lambda_{00})P_2(k+1), \qquad (3.8)$$

$$P_1(0) = \alpha_0,\ \ P_2(0) = \alpha_{00}. \qquad (3.9)$$

В матричном виде они записываются как система (1.3)-(1.4), где

$$A = \begin{pmatrix} (1-\mu_0)(1-\Lambda_0) & (1-\mu_0)\Lambda_0 \\ (1-\mu_{00})\Lambda_{00} & (1-\mu_{00})(1-\Lambda_{00}) \end{pmatrix},$$

и значит система уравнений (3.7)-(3.9) однозначно разрешима. Т.е. решение вида (3.6) с начальными условиями (3.9) является решением системы (3.3)-(3.4) с начальными условиями (3.5). В силу единственности решения задачи (3.3)-(3.5) найденное решение (3.6) является искомым.

Будем искать частные решения системы (3.7)-(3.8) в виде

$$\begin{pmatrix} P_1(k) \\ P_2(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} z^k.$$

Для определения $z, \mathbf{x} = (x_1, x_2)^T$ мы получим уравнения (1.10), (1.11), где

$$C(z)=\begin{pmatrix}\left[(1-\mu_0)(1-\Lambda_0)-1\right]z & (1-\mu_0)\Lambda_0 z\\ (1-\mu_{00})\Lambda_{00}z & \left[(1-\mu_{00})(1-\Lambda_{00})-1\right]z\end{pmatrix},\ D(z)=\begin{pmatrix}-\mu_0 & 0\\ 0 & -\mu_{00}\end{pmatrix}. \qquad (3.10)$$

Далее используем обозначение $C=C(1)$. Из вида матриц C, D следует, что

$c_{11}+c_{12}=-\mu_0, c_{21}+c_{22}=-\mu_{00}$. Т.е. C, D удовлетворяют условиям теоремы 1.3 ,

поэтому один из корней характеристического уравнения

$$z^2\det C+z(c_{11}\mu_{00}+c_{22}\mu_0)+\mu_0\mu_{00}=0 \qquad (3.11)$$

$z_1=1$, соответствующее ему решение $\mathbf{x}$ имеет вид $\begin{pmatrix}x_{11}\\ x_{12}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$. Найдем второе

характеристическое число. По теореме Виета второй корень уравнения (3.11) равен

$z_2=\dfrac{\mu_0\mu_{00}}{\det C}$. Т.к. $c_{11}=-c_{12}-\mu_0, c_{22}=-c_{21}-\mu_{00}$, то

$\det C=(c_{12}\mu_{00}+c_{21}\mu_0)+\mu_0\mu_{00}\geq\mu_0\mu_{00}\geq 0$. Если исключить случай $\mu_0=\mu_{00}=0$, то

отсюда следует выражение $z_2=\dfrac{\mu_0\mu_{00}}{c_{12}\mu_{00}+c_{21}\mu_0+\mu_0\mu_{00}}\in[0,1]$. Нетрудно видеть, что

$z_2\in(0,1)$, если $\mu_0\mu_{00}>0$ и либо $\mu_0<1, \Lambda_0>0$, либо $\mu_{00}<1, \Lambda_{00}>0$.

Далее будем считать выполненными эти условия. Характеристический вектор, отвечающий обобщенному характеристическому числу z_2, с точностью до множителя имеет вид

$\begin{pmatrix}x_{21}\\ x_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\ \dfrac{\mu_0}{c_{12}}\left(\dfrac{1}{z_2}-1\right)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\ \dfrac{\mu_0(1-\mu_{00})\Lambda_{00}}{\mu_{00}(1-\mu_0)\Lambda_0}\end{pmatrix}$. Тогда общее решение системы (3.7)-(3.8)

запишется как

$$\begin{pmatrix} P_1(k) \\ P_2(k) \end{pmatrix} = \beta_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta_2 \begin{pmatrix} -1 \\ \dfrac{\mu_0(1-\mu_{00})\Lambda_{00}}{\mu_{00}(1-\mu_0)\Lambda_0} \end{pmatrix} z_2^k . \tag{3.12}$$

Константы β_1, β_2 найдем из начальных условий (3.9). Они равны

$$\beta_1 = \alpha_0 + \frac{\alpha_{00} - \alpha_0}{1+\xi},\ \beta_2 = \frac{\alpha_{00} - \alpha_0}{1+\xi}, \tag{3.13}$$

где $\xi = \dfrac{\mu_0(1-\mu_{00})\Lambda_{00}}{\mu_{00}(1-\mu_0)\Lambda_0} \geq 0$. Из (3.12)-(3.13) следует, что при $\alpha_{00} > \alpha_0$ функция $P_1(k)$ является монотонно убывающей, а $P_2(k)$ монотонно возрастающей, а при $\alpha_{00} < \alpha_0$ наоборот. При $k \to \infty$ обе функции принимают одинаковые значения, равные $\beta_1 = \alpha_0 + \dfrac{\alpha_{00} - \alpha_0}{1+\xi}$. Если же $\alpha_{00} = \alpha_0 = \alpha$, то $P_1(k) = P_2(k) \equiv \alpha$. Итак, значение

$$P(\infty) = P_1(\infty) = P_2(\infty) = \beta_1 =$$
$$= \frac{\mu_0(1-\mu_{00})\Lambda_{00}}{\mu_0(1-\mu_{00})\Lambda_{00} + \mu_{00}(1-\mu_0)\Lambda_0}\alpha_0 + \frac{\mu_{00}(1-\mu_0)\Lambda_0}{\mu_0(1-\mu_{00})\Lambda_{00} + \mu_{00}(1-\mu_0)\Lambda_0}\alpha_{00},$$

т.е. является выпуклой комбинацией начальных значений α_0, α_{00}.

Среднее значение членов обеих групп, придерживающихся точки зрения Вигов, равно

$$M(\infty) = NP(\infty) =$$
$$= N\left[\frac{\mu_0(1-\mu_{00})\Lambda_{00}}{\mu_0(1-\mu_{00})\Lambda_{00} + \mu_{00}(1-\mu_0)\Lambda_0}\alpha_0 + \frac{\mu_{00}(1-\mu_0)\Lambda_0}{\mu_0(1-\mu_{00})\Lambda_{00} + \mu_{00}(1-\mu_0)\Lambda_0}\alpha_{00}\right].$$

Пусть $\alpha_0 = 1, \alpha_{00} = 0$. Тогда $M(\infty) = N\dfrac{\mu_0(1-\mu_{00})\Lambda_{00}}{\mu_0(1-\mu_{00})\Lambda_{00} + \mu_{00}(1-\mu_0)\Lambda_0}$.

Если $\mu_{00} = 1 - \varepsilon$, а μ_0 фиксированная величина, то

$M(\infty) = \dfrac{N\varepsilon\mu_0\Lambda_{00}}{\varepsilon\mu_0\Lambda_{00} + (1-\varepsilon)(1-\mu_0)\Lambda_0} \underset{\varepsilon\to o}{\to} 0$. Т.е., если Тори не склонны к компромиссу, то вне зависимости от других фиксированных параметров они склонят к своему мнению ($P = 0$) противоположную сторону. Если же и $\mu_0 = 1 - \varepsilon$, то $M(\infty) = N\dfrac{\Lambda_{00}}{\Lambda_{00} + \Lambda_0}$. Теперь победа будет за той группой, которая действует убедительней. Например, при $\Lambda_0 > \Lambda_{00}$ (Тори убедительней Вигов) значение $M(\infty) < \dfrac{N}{2}$, а при $\Lambda_0 \le \Lambda_{00}$ величина $M(\infty) \ge \dfrac{N}{2}$.

Предположим теперь, что

$$\begin{array}{l} p_i(0) = \alpha_0 + \varepsilon\cdot\delta p_i(0) \in [0,1],\ i = \overline{1, N_1}, \\ p_s(0) = \alpha_{00} + \varepsilon\cdot\delta p_s(0) \in [0,1],\ s = \overline{N_1 + 1, N} \end{array}. \tag{3.14}$$

Обозначим векторы $\mathbf{P}(k) = \left(\underbrace{P_1(k),\ldots,P_1(k)}_{N_1}, \underbrace{P_2(k),\ldots,P_2(k)}_{N-N_1}\right)^T$,

$\delta\mathbf{P}(k) = \left(\delta p_1(k),\ldots,\delta p_N(k)\right)^T$.

Теорема 3.1. *Если все* $\left|\delta p_j(0)\right| < 1$*, то решение системы (3.3)-(3.4) с начальными условиями (3.14) имеет вид* $\mathbf{P}(k) + \varepsilon\cdot\delta\mathbf{P}(k) \in [0,1]$*, причем все компоненты* $\left|\delta p_i(k)\right| < 1$.

Доказательство следует из теоремы 1.2.

4. Задача о Пророке и Лжепророке

В рассмотренной в этом разделе задаче получены количественные характеристики воздействия двух средств массовой информации (СМИ) на население. Считается, что эти СМИ придерживаются двух противоположных точек зрения по какому-то вопросу и непоколебимы в своих убеждениях. Например, СМИ, поддерживающие кандидатов от демократической или республиканской партии в предвыборной президентской кампании США. Назовем одно из СМИ Пророком, а другое Лжепророком. Пусть для N человек

$$\lambda_{ij} = \lambda = \frac{1-\Lambda_0-\Lambda_{00}}{N-1}, i \neq j, \lambda_{ii} = 0, \Lambda_0 \geq 0, \Lambda_{00} \geq 0, \Lambda_0 + \Lambda_{00} < 1. \qquad (4.1)$$

Добавим ещё двух участников: Пророка с $\alpha_0 = 1, \mu_0 = 1$ и номером 0 и Лжепророка с $\alpha_{00} = 0, \mu_{00} = 1$ и номером 00. У остальных участников значения $\alpha_i \in (0,1), \mu_i = \mu \in (0,1), i = 1,2,...,N$. Будем считать процесс развивающимся во времени, причём $\alpha_i(k+1) = p_i(k), p_i(0) \in [0,1], i = 1,2,...,N$. Очевидно, что $p_0(k) \equiv 1, p_{00}(k) \equiv 0$. Тогда уравнения (1.1) примут вид

$$\begin{aligned} &p_i(k+1) = \mu p_i(k) + (1-\mu)\left(\Lambda_0 \cdot 1 + \Lambda_{00} \cdot 0\right) + \\ &+(1-\mu)\sum_{j=1}^{N} \lambda_{ij} p_j(k+1), i = 1,2,...,N. \end{aligned} \qquad (4.2)$$

Предложение 4.1. *Для любого* $k = 0,1,...$ *решения системы (4.2)* $p_i(k) \in [0,1]$.

Δ Доказательство вытекает из следствия 1 к теореме 1.1. ▲

Обозначим $M(k) = \sum_{i=1}^{N} p_i(k)$ - математическое ожидание числа людей, поддерживающих на k -том шаге идею Пророка. Чтобы получить уравнение для $M(k)$

добавим в обе части уравнений (4.2) слагаемые $(1-\mu)\lambda p_i(k+1)$ и просуммируем уравнения. Получим

$$M(k+1)+(1-\mu)\lambda M(k+1)=\mu M(k)+N(1-\mu)\Lambda_0+N(1-\mu)\lambda M(k+1),$$

или

$$M(k+1)=\frac{\mu M(k)+N(1-\mu)\Lambda_0}{1-(1-\mu)(1-\Lambda_0-\Lambda_{00})}. \qquad (4.3)$$

Обозначим $\beta(k)=\dfrac{M(k)}{N}\in[0,1]$ долю людей, разделяющих идею Пророка.

Тогда уравнение (4.3) можно переписать в новых переменных

$$\beta(k+1)=\frac{\mu\beta(k)+(1-\mu)\Lambda_0}{1-(1-\mu)(1-\Lambda_0-\Lambda_{00})}=\frac{\mu\beta(k)+(1-\mu)\Lambda_0}{\mu+(1-\mu)(\Lambda_0+\Lambda_{00})}. \qquad (4.4)$$

Пусть

$$q=\frac{\mu}{\mu+(1-\mu)(\Lambda_0+\Lambda_{00})}<1, b=\frac{(1-\mu)\Lambda_0}{\mu+(1-\mu)(\Lambda_0+\Lambda_{00})}<1. \qquad (4.5)$$

В этом случае рекуррентное уравнение (4.4) примет вид $\beta(k+1)=q\beta(k)+b$, решение которого есть

$\beta(k)=\beta(0)q^k+b\dfrac{1-q^k}{1-q}$, или

$$\beta(k)=\frac{b}{1-q}+\left[\beta(0)-\frac{b}{1-q}\right]q^k. \qquad (4.6)$$

Из (4.5) и (4.6) с очевидностью следует, что $\beta(k)\underset{k\to\infty}{\to}\dfrac{b}{1-q}=\dfrac{\Lambda_0}{\Lambda_0+\Lambda_{00}}\leq 1.$

Отметим, что при $\beta(0) < \dfrac{b}{1-q} = \dfrac{\Lambda_0}{\Lambda_0 + \Lambda_{00}}$ функция (4.6) монотонно возрастающая, а

при $\beta(0) > \dfrac{\Lambda_0}{\Lambda_0 + \Lambda_{00}}$ - монотонно убывающая. Итак, если Пророк убедительнее Лжепророка, ($\Lambda_0 > \Lambda_1$), то доля его адептов $\beta(\infty) > 0,5$. В частности, если $0 < \Lambda_0 \le 1,\ \Lambda_{00} = 0$, то $\beta(\infty) = 1$, т.е. за Пророком будут следовать *все*, кто слышал его слово. Скорость нарастания числа последователей Пророка зависит от их коэффициента индивидуализма μ. Так, при $\mu = 0$ значение $\beta(1) = \dfrac{\Lambda_0}{\Lambda_0 + \Lambda_{00}}$. Т.е. всего лишь за *одно* явленное им чудо все неверующие ($\beta(0) = 0$) становятся в меру верующими, а при $\Lambda_{00} = 0$ - абсолютными адептами Пророка. Положим $\mu = 0,5$. Пусть $\beta(0) = 0$. Тогда неравенство $\dfrac{\Lambda_0}{\Lambda_0 + \Lambda_{00}} - \beta(k) \le 10^{-n} \Leftrightarrow k \ge \dfrac{n + \lg \dfrac{\Lambda_0}{\Lambda_0 + \Lambda_{00}}}{-\lg q}$. Положим $\Lambda_0 \le 0,9;\ \Lambda_{00} = 0$, тогда $k \ge \dfrac{n}{\lg 1,9} \approx \dfrac{n}{0,279} = 3,59n$. Отсюда следует, что за 7 шагов (явленных чудес), 99% людей готовы идти за Пророком.

Выводы

В статье предложена многошаговая модель коллективного поведения людей, являющаяся обобщением статической модели П.С.Краснощекова. Модель имеет вид линейной однородной системы разностных уравнений. Исследованы математические свойства решений этой системы. В частности, показано, что при достаточно большом числе этапов обмена мнениями члены коллектива приходят к одному решению, определяемому начальными условиями. Приведены примеры решений двух задач: а) о борьбе двух фракций в парламенте; б) о влиянии СМИ на отношение населения к тому или иному вопросу.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Краснощеков П.С. Простейшая математическая модель поведения. Психология конформизма // Математическое моделирование. 1998. Том 10. №7. С.76–92.

2. Краснощеков П.С., Петров А.А. Принципы построения моделей. М.: Изд. Фазис. Вычислительный центр РАН. 2000.

3.Васин А.А., Краснощеков П.С., Морозов В.В. Исследование операций. Прикладная математика и информатика. М.: Изд. центр Академия. 2008.

4. *M.H. DeGroot.* Reaching a consensus // Journal of the American Statistical Association. – 1974. Т. 69. №. 345. С. 118-121.

5. Schelling T. C. The strategy of conflict. // Harvard university press. 1980.

6 Banerjee A., Besley T. at all. Peer group externalities and learning incentives: A theory of nerd behavior. // Department of Economics/Woodrow Wilson School of Public and International Affairs. Princeton University. 1990.

7. Helbing D., Farkas I., Molnar P., Vicsek T. Simulation of pedestrian crowds in normal and evacuation situations // Pedestrian and evacuation dynamics. 2002. Vol. 21. № 2. P. 21–58.

8. Степанцов М. Е. Математическая модель направленного движения группы людей // Математическое моделирование. 2004. Т. 16. № 3. С. 43–49.

9. Кирик Е. С., Круглов Д. В., Юргельян Т. Б. О дискретной модели движения людей с элементом анализа окружающей обстановки // Журнал Сибирского федерального университета. Серия Математика и физика. 2008. Т. 1. № 3. С. 262–271.

10. Бреер В. В. Модели конформного поведения. Ч. 1. От философии к математическим моделям // Проблемы управления. 2014. Т. 11. № 1. С. 2–13.

11. Макагонов П. П., Эспиноса С.Б.Р., Луценко К. А. Алгоритм расчета влияния эксперта на потребителя информации в социальных сетях и образовательных сайтах // Моделирование и анализ данных. 2014. № 1. С. 74–85.

12. Белолипецкий А.А., Козицин И.В. Об одной математической модели коллективного поведения в дифференциальной форме. // В сб. «Математическое моделирование информационных систем». М.: МФТИ. 2015. С. 66-73.

13. Бекларян А. Л. Фронт выхода в модели поведения толпы при чрезвычайных ситуациях // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. 2015. Т. 20. № 5. С.11-23.

14. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц // М.: Наука. Гл. ред. физмат литературы. 1967.

15. Ашманов С.А.. Введение в математическую экономику // М.: Наука. 1984.