

**Упражнения по курсу Оптимизация и численные методы**  
(1/2 года, для магистров) лектор – профессор М.М. Потапов

1. Привести примеры непрерывных функций, не достигающих своих нижних границ 1) на ограниченном, но незамкнутом множестве; 2) на замкнутом, но неограниченном множестве.

2. Доказать, что пространство  $C[a, b]$  со скалярным произведением  $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)g(t) dt$  является евклидовым, но не является гильбертовым.

3. Показать, что *гильбертов кирпич*

$$U = \{x \in \ell^2 \mid |x_n| \leq 2^{-n}, \quad n = 1, 2, \dots\}$$

является компактным множеством в пространстве  $\ell^2$ .

4. Показать, что функция  $J(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} x_n^2$  непрерывна на всем пространстве  $\ell^2$ , но не достигает своей нижней грани на замкнутом шаре

$$U = \{x \in \ell^2 \mid \|x\| \leq 1\}.$$

5. Показать, что *параллелепипед* в  $L^2(a, b)$

$$U = \{u(t) \in L^2(a, b) \mid c \leq u(t) \leq d \text{ для почти всех } t \in [a, b]\}$$

при  $c < d$  является слабо компактным, но не является компактным множеством в пространстве  $L^2(a, b)$ .

6. Пусть  $J(u) \in C^2(H)$ . Доказать справедливость формулы конечных приращений

$$\langle J'(u+h) - J'(u), g \rangle = \int_0^1 \langle J''(u+th)h, g \rangle dt \quad \forall u, h, g \in H.$$

7. Вычислить первые и вторые производные функционала  $J(u) = \|u\|_H$ . Дифференцируем ли он в точке  $u = 0$  ?

8. Найти первые и вторые производные функционала  $J(u) = g(\|u\|_H)$ , где  $g : R^1 \rightarrow R^1$  – дважды дифференцируемая функция. Дифференцируем ли функционал  $J(u)$  в точке  $u = 0$  при  $g(t) = t^3$  ?

9. В пространстве  $L^2(0, T)$  вычислить градиент  $J'(u)$  терминального квадратичного функционала  $J(u) = |x(T; u) - f|^2$ ,  $f \in R^n$ , определенного на решениях  $x(t) = x(t; u)$  линейной динамической системы

$$x'(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad 0 < t < T, \quad x(0) = 0.$$

10. Вычислить градиент функционала

$$J(u) = \int_0^\ell |y(x; u) - f(x)|^2 dx$$

в пространстве  $L^2(0, \ell)$ , где  $y(x) = y(x; u)$  – решение краевой задачи

$$\begin{cases} -(k(x)y'(x))' + q(x)y(x) = u(x), & 0 < x < \ell, \\ y(0) = 0, \quad y(\ell) = 0, \end{cases}$$

$k(x) \geq k_0 > 0$ ,  $q(x) \geq 0$  и  $f(x)$  – заданные функции.

11. Пусть  $x_0$  – фиксированный элемент из  $H$ ,  $x_0 + L$  – соответствующее замкнутое линейное аффинное многообразие. Доказать, что тогда  $p = \text{pr}_{x_0+L} h$  в том и только в том случае, когда

$$p \in x_0 + L, \quad \langle p - h, \ell \rangle_H = 0 \quad \forall \ell \in L.$$

12. Найти явные выражения для проекций на полупространство

$$\{u \in H \mid \langle c, u \rangle_H \leq \beta\}$$

в гильбертовом пространстве  $H$  и на параллелепипед

$$\{u = (u_1, \dots, u_n) \in R^n \mid \alpha_i \leq u_i \leq \beta_i, \quad i = 1, 2, \dots, n\}$$

в  $n$ -мерном пространстве  $R^n$ .

13. Найти явное выражение для шага  $\alpha_k$  метода скорейшего спуска в задачах минимизации квадратичных функционалов вида

$$J(u) = \|Au - f\|_F^2, \quad A \in L(H \rightarrow H), \quad f \in F,$$

и

$$J(u) = \frac{1}{2} \langle Au, u \rangle_H - \langle f, u \rangle_H, \quad A^* = A \geq 0, \quad A \in L(H \rightarrow H), \quad f \in H.$$

14. С помощью симплекс-метода решить каноническую задачу линейного программирования в  $R^4$  :

$$\begin{aligned} J(u) = \langle c, u \rangle &\rightarrow \inf, & Au = b, & \quad u \geq 0, & \quad u = (u_1, u_2, u_3, u_4), \\ c = (-2, -1, -3, -1), & & A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, & & b = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

В качестве начального приближения взять точку  $v_0 = (0, 0, 1, 1)$ .