

1. Найдите в явном виде натуральное число, заданное выражением $\sqrt{5 - 2\sqrt{6}}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$.

2. Найдите максимальное значение функции $\log_{1/3}(x^2 + 4x + 31)$.

3. Найдите все положительные x , удовлетворяющие неравенству $x^{-5x-3} < x^{-7}$.

4. Решите уравнение $\sin^2 x + \sqrt{2} |\sin x| \cos\left(\frac{5x}{2} - \frac{5\pi}{8}\right) + \frac{1}{2} = 0$.

5. Окружности Ω_1 и Ω_2 с центрами в точках O_1 и O_2 касаются внешним образом в точке A . Общая внешняя касательная к этим окружностям касается Ω_1 в точке B и пересекает в точке C общую касательную этих окружностей, проходящую через точку A . Прямая, делящая угол ACO_1 пополам, пересекает прямые O_1O_2 и BO_1 в точках L и D соответственно. Найдите CO_2 , если известно, что $LO_1 = 2$, а прямые CO_2 и DO_2 перпендикулярны.

6. Найдите все x, y на интервале $(0, \frac{\pi}{2})$, удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} \frac{1}{\cos^3 x} + \frac{1}{\sin^3 y} = 16 \\ \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 y = 6 \end{cases}$$

7. В основании прямой призмы лежит квадрат со стороной 1. Высота призмы равна $\sqrt{3}$. Найдите расстояние между большой диагональю призмы и скрещивающейся с ней диагональю боковой грани.

8. Пусть

$$f(x, y) = \sqrt{-6x^2 - 11y^2 - 16xy + 5} + y,$$

$$g(x, y) = -\sqrt{-6x^2 - 11y^2 - 16xy + 5} + y.$$

Найдите все значения, которые может принимать хотя бы одна из этих функций.

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

август 2014 г.

ВАРИАНТ 14д

1. Что больше и почему: площадь круга радиуса 2 см или площадь прямоугольника со сторонами 80 мм и 18 мм?

2. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} (y - 3x)(y - 2x - 1) = 0, \\ x^2 + y^2 = 10. \end{cases}$$

3. Решите уравнение:

$$4 + 2 \cdot 4^{\sqrt{x}} = 9 \cdot 2^{\sqrt{x}}.$$

4. Дано, что $\alpha \in [\pi; 2\pi]$ и $\cos \alpha \cdot (11 - 5 \cos \alpha) = 2$. Найдите значение $\sin 4\alpha$.

5. Решите уравнение:

$$3x + x\sqrt{2x - 7} = \frac{x^2}{2}.$$

6. В треугольнике ABC $AC = BC$ и $AB = 6$. Точка M — середина AB . Точка K лежит на BC , причем $CK = \frac{1}{3}BC$, и площадь треугольника ACK равна 8. Найдите расстояние от точки K до точки M .

7. Найдите все пары положительных целых чисел (m, n) такие, что:

$$89 + 9n^2 < m^2 < 95 + 9n^2.$$

8. Решите неравенство:

$$3^x (3^x - 4x) + 5x^2 + 10 > 6x.$$