Глава 2

k-ЗНАЧНАЯ ЛОГИКА

Конечнозначные логики вводятся как обобщение двузначной логики. В силу этого наше изложение местами будет кратким, а некоторые аналогичные определения и доказательства будут опущены. Особое внимание обратим на два обстоятельства:

1) в k-значных логиках сохраняются многие свойства и результаты, которые имели место в двузначной логике;

2) в k-значных логиках наблюдаются явления, обнаруживающие принципиальное их отличие от алгебры логики.

В связи с этим некоторые задачи не имеют такого исчерпывающего решения как в алгебре логики, а другие вовсе не решены.

§ 1. Функции k-значной логики. Формулы и реализация функций формулами

Пусть $U=\{u_1, u_2, \ldots, u_m, \ldots\}$ — исходный алфавит переменных (аргументов). Будем рассматривать функции $f(u_{i_1}, \ldots, u_{i_n})$ $(u_{i_\nu} \neq u_{i_\mu}$ при $\nu \neq \mu)$, аргументы которых определены на множестве $E_k=\{0, 1, \ldots, k-1\}$, и такие, что $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in E_k$, когда $\alpha_i \in E_k$ $(i=1, 2, \ldots, n)$.

Для упрощения записи мы будем использовать для переменных из U метаобозначения $x, y, z, \ldots$, а также $x_i, y_i, z_i, \ldots$ и употреблять для функций более простую запись $f(x_1, \ldots, x_n)$.

Очевидно, что функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ полностью определена, если задана ее таблица (см. табл. 1). В этой таблице наборы суть разложения в k-ичной системе счисления чисел $0, 1, \ldots, k^n-1$. Символ f здесь будет интерпретироваться как символ, обозначающий отображение, характеризуемое таблицей, а символы $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — как названия столбцов. Для функций одной переменной мы наряду с таблицами будем использовать запись в виде (обобщенной) подстановки

$$S(x)=\begin{pmatrix} 0 & 1 \ldots k-1 \\ i_0 & i_1 \ldots i_{k-1} \end{pmatrix},$$

где $S(\alpha)=i_\alpha$.