§ 2. Примеры полных систем

В P_k определение полноты выглядит так же, как и в P_2.

Определение. Система $\mathfrak{P}$ функций $f_1, f_2, \ldots, f_s, \ldots$ из P_k называется (функционально) *полной*, если любая функция из P_k может быть записана в виде формулы через функции этой системы.

Ниже рассматриваются примеры полных систем. Для обоснования полноты мы будем использовать принцип сведéния задачи о полноте одних систем к задаче о полноте других (см. § 5, гл. 1).

1. Система $\mathfrak{P} = P_k$ полна. Очевидно, что множество всех функций из P_k представляет полную систему.

2. Система

$$\mathfrak{P} = \{0, 1, \ldots, k-1, I_0(x), \ldots, I_{k-1}(x), \min(x_1, x_2), \max(x_1, x_2)\}$$

является полной.

Теорема 2. *Система*

$$\mathfrak{P} = \{0, 1, \ldots, k-1, I_0(x), \ldots, I_{k-1}(x), \min(x_1, x_2), \max(x_1, x_2)\}$$

является полной в P_k.

Доказательство. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ — произвольная функция из P_k. Для нее имеет место разложение

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \bigvee_{(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)} I_{\sigma_1}(x_1) \,\&\, \ldots \,\&\, I_{\sigma_n}(x_n) \,\&\, f(\sigma_1, \ldots, \sigma_n).$$

Данная формула (правая часть) построена из функций, входящих в $\mathfrak{P}$. Теорема доказана.

3. Система $\mathfrak{P} = \{\bar{x}, \max(x_1, x_2)\}$ является полной.

Теорема 3. *Система* $\mathfrak{P} = \{\bar{x}, \max(x_1, x_2)\}$ *полна в* P_k.

Доказательство. а) Построение констант. Из функции $\bar{x} = x + 1$ получаем функции

$$x + 2 = (x+1) + 1, \ldots, x + k - 1 = (x + k - 2) + 1,$$
$$x = x + k = (x + (k-1)) + 1.$$

Легко видеть, что

$$\max(x, x+1, \ldots, x+k-1) = k-1.$$

Отсюда при помощи $\bar{x}$ получаем остальные константы

б) Построение функций одной переменной. Сначала получаем функции $I_i(x)$ $(i = 0, \ldots, k-1)$:

$$I_i(x) = 1 + \max_{\alpha \neq k-1-i} \{x + \alpha\}.$$

В самом деле, если $x = i$, то левая часть равна $k-1$, а правая часть есть

$$1 + \max_{\alpha \neq k-1-i} \{i + \alpha\} = 1 + \max_{i+\alpha \neq k-1} \{i + \alpha\} =$$
$$= 1 + k - 2 = k - 1;$$

если $x \neq i$, то левая часть равна 0, а правая —

$$1 + \max_{\alpha \neq k-1-i} \{x + \alpha\} = 1 + (x + (k-1-x)) = k = 0.$$

Введем функции $f_{s,i}(x)$, где

$$f_{s,i}(x) = \begin{cases} s & \text{при } x = i, \\ 0 & \text{при } x \neq i. \end{cases}$$

Покажем, что

$$f_{s,i}(x) = s + 1 + \max[I_i(x), k-1-s].$$

Последнее легко усматривается из графиков, изображенных на рис. 1.

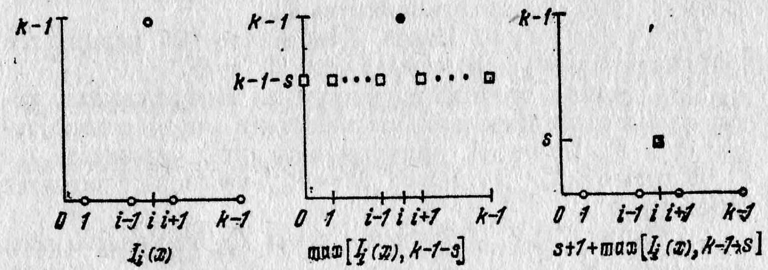

Рис. 1

Если $g(x)$ — произвольная функция одной переменной из P_k, то

$$g(x) = \max\{f_{g(0),0}(x), f_{g(1),1}(x), \ldots, f_{g(k-1),k-1}(x)\},$$

и, в частности, $\sim x = \max\{f_{k-1,0}(x), f_{k-2,1}(x), \ldots, f_{0,k-1}(x)\}$.

в) Получение $\min(x_1, x_2)$. Мы видели, что

$$\sim \min(x_1, x_2) = \max(\sim x_1, \sim x_2).$$