Отсюда

$$\min(x_1, x_2) = \sim\max(\sim x_1, \sim x_2).$$

Таким образом, мы можем при помощи формул над исходной системой функций выразить любую из функций системы

$$\{0, 1, \ldots, k-1, I_0(x), \ldots, I_{k-1}(x), \min(x_1, x_2), \max(x_1, x_2)\},$$

относительно которой доказано, что она полная. Поэтому и система $\{\bar{x}, \max(x_1, x_2)\}$ является полной. Теорема доказана.

Введем обозначение: $V_k(x_1, x_2) = \max(x_1, x_2) + 1$. Функция $V_k(x_1, x_2)$ называется *функцией Вебба* и представляет собой аналог функции Шеффера.

4. Система $\mathfrak{P} = \{V_k(x_1, x_2)\}$ является полной. Вопрос о ее полноте может быть легко сведен к полноте системы 3.

С понятием полноты связано понятие замыкания и замкнутого класса.

Определение. Пусть $\mathfrak{M}$ — произвольное подмножество функций из P_k. *Замыканием* $\mathfrak{M}$ называется множество $[\mathfrak{M}]$ всех функций из P_k, представимых в виде формул через функции множества $\mathfrak{M}$.

Определение. Класс (множество) $\mathfrak{M}$ называется (функционально) *замкнутым*, если $[\mathfrak{M}] = \mathfrak{M}$.

Для данных понятий справедливы высказывания, которые были сделаны при рассмотрении аналогичных понятий в P_2. Приведем примеры замкнутых множеств.

Пример 2. 1) Класс $\mathfrak{M} = P_k$, очевидно, является замкнутым.

2) Пусть $\mathscr{E} \subset E_k$. Обозначим через $T_{\mathscr{E}}$ множество всех функций $f(x_1, \ldots, x_n)$ из P_k таких, что $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathscr{E}$, если $\alpha_i \in \mathscr{E}$ $(i = 1, \ldots, n)$. Другими словами, $T_{\mathscr{E}}$ — множество всех функций из P_k, *сохраняющих* $\mathscr{E}$; будем записывать это так:

$$f(\mathscr{E}, \mathscr{E}, \ldots, \mathscr{E}) \subseteq \mathscr{E}.$$

Класс $\mathfrak{M} = T_{\mathscr{E}}$, очевидно, является замкнутым.

В терминах замыкания можно дать другое определение полноты, эквивалентное исходному: $\mathfrak{M}$ — полная система, если $[\mathfrak{M}] = P_k$.

Понятие замкнутого класса может быть приложено к решению вопроса об обосновании неполноты некоторых систем.

Пример 3. Рассмотрим систему $\mathfrak{P} = \{\sim x, \max(x_1, x_2)\}$. Пусть $\mathscr{E} = \{0, k-1\}$. Так как обе функции сохраняют $\mathscr{E}$, то

$$[\mathfrak{P}] \subseteq T_{\mathscr{E}}.$$

Поскольку при $k \geqslant 3$, $\mathscr{E} \neq E_k$, то $T_{\mathscr{E}}$ не содержит, например, константу 1. Значит при $k \geqslant 3$ $\mathfrak{P}$ не будет полной системой. На этом примере видно, что, хотя система $\{\sim x, \max(x_1, x_2)\}$ и является обобщением системы $\{\bar{x}, x_1 \vee x_2\}$ булевых функций, она не является полной.

§ 3. Распознавание полноты. Теорема о полноте

Теперь мы перейдем к обсуждению вопросов полноты для произвольных систем $\mathfrak{P}$. Следовательно, здесь нас будет интересовать, каким образом по множеству $\mathfrak{P}$ можно узнать, будет оно полным или нет. Мы рассмотрим два подхода к решению этой задачи.

Первый подход алгоритмический. Он требует уточнения слов «задана произвольная система $\mathfrak{P}$». Ввиду этого мы несколько сузим задачу и будем предполагать, что система $\mathfrak{P}$ конечна:

$$\mathfrak{P} = \{f_1, f_2, \ldots, f_s\}$$

и, стало быть, она может быть явно задана либо перечнем таблиц, либо списком формул. Так же как и в случае $k = 2$, можно считать, что каждая из функций системы $\mathfrak{P}$ зависит от переменных

$$x_1, x_2, \ldots, x_n.$$

Наша задача может быть сформулирована следующим образом: существует ли алгоритм, позволяющий для каждой конечной системы $\mathfrak{P}$ выяснять, будет она полной или нет (*задача распознавания полноты*).

Для произвольного $p \geqslant 1$ обозначим

$$g_i^p(x_1, \ldots, x_p) = x_i$$

и через $\mathfrak{M}_{x_1 \ldots x_p}$ — множество всех функций из $\mathfrak{M}$, зависящих от переменных $x_1, \ldots, x_p$.

Теорема 4. *Существует алгоритм для распознавания полноты.*