Доказательство. Построим по индукции последовательность множеств

$$\mathfrak{R}_0, \mathfrak{R}_1, \ldots, \mathfrak{R}_r, \ldots$$

функций от двух переменных x_1 и x_2.

Базис индукции. Положим $\mathfrak{R}_0 = \Lambda$, где Λ — пустое множество.

Индуктивный переход. Пусть уже построены множества $\mathfrak{R}_0, \mathfrak{R}_1, \ldots, \mathfrak{R}_r$; покажем, как определяется множество $\mathfrak{R}_{r+1}$. Для этого выпишем функции, входящие в $\mathfrak{R}_r$ $(r \geqslant 0)$:

$$\mathfrak{R}_r = \{h_1(x_1, x_2), \ldots, h_{s_r}(x_1, x_2)\} \quad (s_r = 0 \text{ при } r = 0),$$

и для каждого i $(i = 1, \ldots, s)$ рассмотрим всевозможные формулы вида

$$f_i(H_1(x_1, x_2), \ldots, H_n(x_1, x_2)),$$

где $H_l(x_1, x_2)$ есть либо функция $h_j(x_1, x_2)$ $(j = 1, \ldots, s_r)$, либо $g^2_\sigma(x_1, x_2)$.

Таким образом, просматривая $s(s_r + 2)^n$ формул, мы, быть может, получим функции, не вошедшие в $\mathfrak{R}_r$. Обозначим их через

$$h_{s_r+1}(x_1, x_2), \ldots, h_{s_{r+1}}(x_1, x_2).$$

Положим $\mathfrak{R}_{r+1} = \mathfrak{R}_r \cup \{h_{s_r+1}(x_1, x_2), \ldots, h_{s_{r+1}}(x_1, x_2)\}$. Очевидно, что

$$\mathfrak{R}_0 \subseteq \mathfrak{R}_1 \subseteq \ldots \subseteq \mathfrak{R}_r \subseteq \ldots$$

Из построения ясно, что если $\mathfrak{R}_{r+1} = \mathfrak{R}_r$, то $\mathfrak{R}_r = \mathfrak{R}_{r+1} = \ldots$, т. е. цепочка множеств стабилизируется. Обозначим через r^* минимальный номер множества, начиная с которого наступает стабилизация. Тогда цепочка множеств

$$\mathfrak{R}_0 \subset \mathfrak{R}_1 \subset \ldots \subset \mathfrak{R}_{r^*}$$

строго возрастает. Так как мощность $\mathfrak{R}_i$ не больше, чем k^{k^2}, то $r^* \leqslant k^{k^2}$. Значит, момент стабилизации может быть обнаружен через ограниченное число шагов. Рассмотрим множество $\mathfrak{R}_{r^*}$. Возможны два случая.

1) $\mathfrak{R}_{r^*}$ содержит все функции от двух переменных x_1, x_2 и, значит, содержит $V_k(x_1, x_2)$. Тогда исходная система полна.

2) $\mathfrak{R}_{r^*}$ не содержит всех функций от двух переменных. Поскольку в этом случае $[\mathfrak{P}]_{x_1 x_2} = \mathfrak{R}_{r^*}$ (см. замечание 1 из § 2 гл. 1), то $[\mathfrak{P}]$ не содержит всех функций от переменных x_1 и x_2. Следовательно, $\mathfrak{P}$ не полна.

Из данных рассуждений легко извлекается алгоритм: строим классы $\mathfrak{R}_0, \mathfrak{R}_1, \ldots, \mathfrak{R}_{r^*}$ до момента стабилизации и рассматриваем класс $\mathfrak{R}_{r^*}$, по которому и определяем, имеет место полнота для $\mathfrak{P}$ или нет. Теорема доказана.

Теорема 5. *Из всякой полной в P_k системы $\mathfrak{P}$ можно выделить конечную подсистему, являющуюся также полной.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{P} = \{f_1, f_2, \ldots, f_s, \ldots\}$. В силу полноты функция $V_k(x_1, x_2)$ может быть выражена через функции системы $\mathfrak{P}$ в виде формулы

$$V_k(x_1, x_2) = \mathfrak{A}[f_{i_1}, \ldots, f_{i_r}].$$

Очевидно, что подсистема $\{f_{i_1}, \ldots, f_{i_r}\}$ является искомой. Теорема доказана.

Таким образом, существенно бесконечных полных систем не бывает, и тем самым введенное выше ограничение в задаче распознавания полноты является не столь сильным, как это могло казаться первоначально.

Второй подход в решении вопроса о полноте связан с проверкой некоторых свойств класса $\mathfrak{P}$.

Введем одно понятие и докажем относительно него две леммы.

Пусть $\mathfrak{R}$ — класс функций $h_j(y_1, \ldots, y_p)$ из P_k, зависящих от p переменных $y_1, \ldots, y_p$. Предположим, что он содержит функции $g_i(y_1, \ldots, y_p) = y_i$ $(i = 1, \ldots, p)$.

Определение. Функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ *сохраняет множество* $\mathfrak{R}$, если для любых функций $h_{i_1}(y_1, \ldots, y_p), \ldots, h_{i_n}(y_1, \ldots, y_p)$ из $\mathfrak{R}$

$$f(h_{i_1}(y_1, \ldots, y_p), \ldots, h_{i_n}(y_1, \ldots, y_p)) \in \mathfrak{R}.$$

Обозначим через $\mathfrak{M}$ класс всех функций из P_k, сохраняющих множество $\mathfrak{R}$.

Пример 4. Пусть $k = 2$, $p = 1$ и $\mathfrak{R} = \{y, \bar{y}\}$. Тогда функция $f(x_1, \ldots, x_n)$, сохраняющая множество $\mathfrak{R}$, удовлетворяет соотношению

$$f(y^{\sigma_1}, \ldots, y^{\sigma_n}) = y^{\sigma},$$

откуда

$$f(\bar{\sigma}_1, \ldots, \bar{\sigma}_n) = \bar{f}(\sigma_1, \ldots, \sigma_n).$$

Значит, функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ — самодвойственная, и класс