стах будут стоять значения, отличные от 2. Поэтому правая часть примет значение 0. В то же время левая часть на данном наборе равна 1. Мы пришли к противоречию.

3. Все формулы $\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_r$ — символы переменных. В этом случае $r > m$ и, следовательно, в формуле встретятся по крайней мере два вхождения некоторой переменной x_p. Взяв набор $x_1 = \ldots = x_{p-1} = x_{p+1} = \ldots = x_m = 2$ и $x_p = 1$, мы обратим левую часть в 1, а правую в 0. Следовательно, этот случай также невозможен. Теорема доказана.

Непосредственно к доказанному примыкает следующая теорема.

Теорема 13. *Для всякого k ($k \geqslant 3$) P_k содержит континуум различных замкнутых классов.*

Доказательство. Число замкнутых классов в P_k можно оценить сверху числом всех подмножеств функций из P_k. Так как P_k содержит счетное число функций, то число подмножеств P_k равно континууму.

Для завершения доказательства нужно оценить снизу число замкнутых классов в P_k. С этой целью рассмотрим замкнутый класс $\mathfrak{M}_k$, построенный при доказательстве предыдущей теоремы. Этот класс имеет базис

$$\{f_2, f_3, \ldots\}.$$

Образуем для каждой последовательности $\{\rho_1, \rho_2, \ldots\}$, где $2 \leqslant \rho_1 < \rho_2 < \ldots$, класс $\mathfrak{M}_k(\rho_1, \rho_2, \ldots)$ как класс, порожденный системой функций $\{f_{\rho_1}, f_{\rho_2}, \ldots\}$. Легко видеть, что

$$\mathfrak{M}_k(\rho_1', \rho_2', \ldots) \neq \mathfrak{M}_k(\rho_1'', \rho_2'', \ldots),$$

если

$$\{\rho_1', \rho_2', \ldots\} \neq \{\rho_1'', \rho_2'', \ldots\}.$$

Следовательно, семейство $\{\mathfrak{M}_k(\rho_1, \rho_2, \ldots)\}$ является континуальным семейством. Теорема доказана.

Теорема 14. *Система полиномов по $\operatorname{mod} k$ полна в P_k тогда и только тогда, когда $k = p$, где p — простое число.*

Доказательство. Легко видеть, что для любой функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ из P_k имеет место представление

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)} j_{\sigma_1}(x_1) \ldots j_{\sigma_n}(x_n) f(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \pmod{k}.$$