

Упражнения по курсу Оптимизация и численные методы
(1/2 года, для магистров) лектор – доцент М.М.Потапов

1. Привести примеры непрерывных функций, не достигающих своих нижних граней 1) на ограниченном, но незамкнутом множестве; 2) на замкнутом, но неограниченном множестве.

2. Доказать, что пространство $C[a, b]$ со скалярным произведением $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)g(t) dt$ является евклидовым, но не является гильбертовым.

3. Показать, что *гильбертов кирпич*

$$U = \{x \in \ell^2 \mid |x_n| \leq 2^{-n}, \quad n = 1, 2, \dots\}$$

является компактным множеством в пространстве ℓ^2 .

4. Показать, что функция $J(x) = - \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)^{-\frac{1}{n+1}} x_n^2$ непрерывна на всем пространстве ℓ^2 , но не достигает своей нижней грани на замкнутом шаре

$$U = \{x \in \ell^2 \mid \|x\| \leq 1\}.$$

5. Показать, что *параллелепипед* в $L^2(a, b)$

$$U = \{u(t) \in L^2(a, b) \mid c \leq u(t) \leq d \text{ для почти всех } t \in [a, b]\}$$

при $c < d$ является слабо компактным, но не является компактным множеством в пространстве $L^2(a, b)$.

6. Пусть $J(u) \in C^2(H)$. Доказать справедливость формулы конечных приращений

$$\langle J'(u+h) - J'(u), g \rangle = \int_0^1 \langle J''(u+th)h, g \rangle dt \quad \forall u, h, g \in H.$$

7. Вычислить первые и вторые производные функционала $J(u) = \|u\|_H$. Дифференцируем ли он в точке $u = 0$?

8. Найти первые и вторые производные функционала $J(u) = g(\|u\|_H)$, где $g : R^1 \rightarrow R^1$ – дважды дифференцируемая функция. Дифференцируем ли функционал $J(u)$ в точке $u = 0$ при $g(t) = t^3$?

9. В пространстве $L^2(0, T)$ вычислить градиент $J'(u)$ *терминального* квадратичного функционала $J(u) = |x(T; u) - f|^2$, $f \in R^n$, определенного на решениях $x(t) = x(t; u)$ линейной динамической системы

$$x'(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad 0 < t < T, \quad x(0) = 0.$$

10. В пространстве L_h^2 сеточных функций $u = (u_1, u_2, \dots, u_N)$ со скалярным произведением $\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^N u_i v_i h$ вычислить производную $J'(u)$ функционала $J(u) = \sum_{i=1}^N |x_i(u) - f_i|^2 h$, определенного на решениях $x_i = x_i(u)$ дискретной линейной системы

$$x_i - x_{i-1} = h(A_i x_{i-1} + B_i u_i), \quad i = 1, 2, \dots, N; \quad x_0 = 0.$$

11. Вычислить градиент функционала

$$J(u) = \int_0^\ell |y(x; u) - f(x)|^2 dx$$

в пространстве $L^2(0, \ell)$, где $y(x) = y(x; u)$ – решение краевой задачи

$$\begin{cases} -(k(x)y'(x))' + q(x)y(x) = u(x), & 0 < x < \ell, \\ y(0) = 0, \quad y(\ell) = 0, \end{cases}$$

$k(x) \geq k_0 > 0$, $q(x) \geq 0$ и $f(x)$ – заданные функции.

12. Пусть x_0 – фиксированный элемент из H , $x_0 + L$ – соответствующее замкнутое линейное аффинное многообразие. Доказать, что тогда $p = \text{pr}_{x_0 + L} h$ в том и только в том случае, когда

$$p \in x_0 + L, \quad \langle p - h, \ell \rangle_H = 0 \quad \forall \ell \in L.$$

13. Найти явные выражения для проекций на гиперплоскость $\{u \in H \mid \langle c, u \rangle_H = \beta\}$ в гильбертовом пространстве H и на параллелепипед

$$\{u = (u_1, \dots, u_n) \in R^n \mid \alpha_i \leq u_i \leq \beta_i, \quad i = 1, 2, \dots, n\}$$

в n -мерном пространстве R^n .

14. Найти явное выражение для шага α_k в методе скорейшего спуска для задачи минимизации квадратичного функционала вида

$$J(u) = \frac{1}{2} \langle Au, u \rangle_H - \langle f, u \rangle_H, \quad A^* = A \geq 0, \quad A \in L(H \rightarrow H), \quad f \in H.$$

15. С помощью симплекс-метода решить каноническую задачу линейного программирования в R^4 :

$$\begin{aligned} J(u) = \langle c, u \rangle &\rightarrow \inf, \quad Au = b, \quad u \geq 0, \quad u = (u_1, u_2, u_3, u_4), \\ c = (-2, -1, -3, -1), \quad A &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

В качестве начального приближения взять точку $v_0 = (0, 0, 1, 1)$.