Упражнения по курсу **Оптимизация и численные методы**
(1/2 года, для магистров) лектор – доцент М.М.Потапов

1. Привести примеры непрерывных функций, не достигающих своих нижних граней 1) на ограниченном, но незамкнутом множестве; 2) на замкнутом, но неограниченном множестве.

2. Доказать, что пространство $C[a,b]$ со скалярным произведением $\langle f, g\rangle = \int_a^b f(t)g(t)\,dt$ является евклидовым, но не является гильбертовым.

3. Показать, что *гильбертов кирпич*

$$U = \{x \in \ell^2 \mid |x_n| \leqslant 2^{-n}, \quad n = 1, 2, \ldots\}$$

является компактным множеством в пространстве ℓ^2.

4. Показать, что функция $J(x) = -\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}\, x_n^2$ непрерывна на всем пространстве ℓ^2, но не достигает своей нижней грани на замкнутом шаре

$$U = \{x \in \ell^2 \mid \|x\| \leqslant 1\}\,.$$

5. Показать, что *параллелепипед* в $L^2(a,b)$

$$U = \{u(t) \in L^2(a,b) \mid c \leqslant u(t) \leqslant d \text{ для почти всех } t \in [a,b]\ \}$$

при $c < d$ является слабо компактным, но не является компактным множеством в пространстве $L^2(a,b)$.

6. Пусть $J(u) \in C^2(H)$. Доказать справедливость формулы конечных приращений

$$\langle J'(u+h) - J'(u),\, g\rangle = \int_0^1 \langle J''(u+th)h,\, g\rangle\, dt \quad \forall u, h, g \in H.$$

7. Вычислить первые и вторые производные функционала $J(u) = \|u\|_H$. Дифференцируем ли он в точке $u = 0$?

8. Найти первые и вторые производные функционала $J(u) = g(\|u\|_H)$, где $g : R^1 \to R^1$ – дважды дифференцируемая функция. Дифференцируем ли функционал $J(u)$ в точке $u = 0$ при $g(t) = t^3$?

9. В пространстве $L^2(0,T)$ вычислить градиент $J'(u)$ *терминального* квадратичного функционала $J(u) = |x(T;u) - f|^2,\ f \in R^n$, определенного на решениях $x(t) = x(t;u)$ линейной динамической системы

$$x'(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad 0 < t < T, \quad x(0) = 0.$$

10. Вычислить градиент функционала

$$J(u) = \int_0^{\ell} |y(x;u) - f(x)|^2\, dx$$

в пространстве $L^2(0,\ell)$, где $y(x) = y(x;u)$ – решение краевой задачи

$$\begin{cases} -(k(x)y'(x))' + q(x)y(x) = u(x), \quad 0 < x < \ell, \\ y(0) = 0, \;\; y(\ell) = 0, \end{cases}$$

$k(x) \geqslant k_0 > 0,\; q(x) \geqslant 0$ и $f(x)$ – заданные функции.

11. Пусть x_0 – фиксированный элемент из $H,\; x_0 + L$ – соответствующее замкнутое линейное аффинное многообразие. Доказать, что тогда $p = \mathrm{pr}_{x_0+L} h$ в том и только в том случае, когда

$$p \in x_0 + L, \quad \langle p - h, \ell\rangle_H = 0 \quad \forall \ell \in L.$$

12. Найти явные выражения для проекций на полупространство

$$\{u \in H \mid \langle c, u\rangle_H \leqslant \beta\}$$

в гильбертовом пространстве H и на параллелепипед

$$\{u = (u_1, ..., u_n) \in R^n \mid \alpha_i \leqslant u_i \leqslant \beta_i,\; i = 1, 2, \ldots, n\}$$

в n-мерном пространстве R^n.

13. Найти явное выражение для шага α_k метода скорейшего спуска в задачах минимизации квадратичных функционалов вида

$$J(u) = \|Au - f\|_F^2, \quad A \in L(H \to H), \quad f \in F,$$

и

$$J(u) = \frac{1}{2}\langle Au, u\rangle_H - \langle f, u\rangle_H, \quad A^* = A \geqslant 0, \quad A \in L(H \to H), \quad f \in H.$$

14. С помощью симплекс-метода решить каноническую задачу линейного программирования в R^4 :

$$J(u) = \langle c,\, u\rangle \to \inf, \quad Au = b, \;\; u \geqslant 0, \quad u = (u_1, u_2, u_3, u_4),$$
$$c = (-2, -1, -3, -1), \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

В качестве начального приближения взять точку $v_0 = (0, 0, 1, 1)$.