Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М.В.ЛОМОНОСОВА»

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ

УНИВЕРСИТЕТ МГУ-ППИ В ШЭНЬЧЖЭНЕ

УТВЕРЖДАЮ

Декан факультета ВМК МГУ,

Академик ____________

/И.А. Соколов/

«14» сентября 2022 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Дифференциальные уравнения и математическое моделирование

Differential equations and mathematical modeling

Уровень высшего образования:

Подготовка кадров высшей квалификации

Москва 2022

Рабочая программа дисциплины разработана в соответствии с Приказом Ректора МГУ №1216 от 24 ноября 2021 года «Об утверждении Требований к основным программам подготовки научных и научно-педагогических кадров в аспирантуре, самостоятельно устанавливаемых Московским государственным университетом имени М.В. Ломоносова»

1. Краткая аннотация.

Название дисциплины - Дифференциальные уравнения и математическое моделирование.

Лекции содержат важные материалы для теории и приложений, не затрагивающиеся в стандартных курсах. К ним относятся дифференциально-алгебраические уравнения, уравнения с запаздывающим аргументом, элементы методов качественного анализа дифференциальных уравнений, примеры подходов к построению математических моделей в электротехнике и химической кинетике.

Цель изучения дисциплины. Данный курс направлен на овладение современными методами построения и анализа математических моделей, возникающих при решении естественнонаучных задач (фундаментальных и прикладных) и основанных на дифференциальных уравнениях различного типа, а также идеями для построения эффективных численных методов, использующих свойства точных решений. Одна из задач курса заключается в развитии способности к критическому анализу современных научных достижений, генерированию новых идей при решении исследовательских и практических задач, в том числе в междисциплинарных областях

2. Уровень высшего образования –аспирантура

3. Научная специальность

1.1.2. «Дифференциальные уравнения и математическая физика».

Область науки**:** Физико-математические науки.

4. Место дисциплины (модуля) в структуре Программы аспирантуры
Обязательные курсы.

5. Объем дисциплины (модуля) составляет 3 зачетных единицы, всего 108 часов, из которых 28 часа составляет контактная работа студента с преподавателем (24 часа занятия лекционного типа, 4 часа мероприятия текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации), 80 часов составляет самостоятельная работа учащегося.

6. Входные требования для освоения дисциплины (модуля), предварительные условия.

На предыдущих уровнях высшего образования должны быть освоены общие курсы:

1. Математический анализ
2. Линейная алгебра
3. Обыкновенные дифференциальные уравнения
4. Уравнения математической физики
5 Численные методы.

7. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам

Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины (модуля), **форма промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)**	**Всего** **(часы)**	В том числе								
		Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы изних						**Самостоятельная работа обучающегося, часы** из них		
		Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа	Групповые консультации	Индивидуальные консультации	Учебные занятия, направленные на проведение текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации	**Всего**	Выполнение домашних заданий	Подготовка к коллоквиумам	**Всего**
Тема 1. *Роль дифференциальных уравнений и математического моделирования в научном методе приобретения знаний. Задачи математического моделирования.* Основные виды дифференциальных уравнений. Обыкновенные дифференциальные	4	2	-	-	-		2	2	-	2

уравнения. Дифференциально алгебраические уравнения. Дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. Интегро - дифференциальные уравнения. Примеры математических моделей в физике, химии, биологии, экологии.										
Тема 2. *Задача Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений и свойства ее решений.* Задачи Коши для дифференциальных уравнений. Стандартная постановка для нормальной системы уравнений. Носитель решения. Векторное поле. Состояние моделируемой системы. Фазовое пространство и расширенное фазовое	8	4	-	-	-		4	4	-	4

пространство. Фазовый поток. Представления решения задачи. Автономная система. Параметрическая система. Постановка задачи для матрицы-функции. Матрица Якоби фазового потока. Уравнение в вариациях. Постановка задачи для уравнений второго порядка. Редукция задачи для уравнений высокого порядка. Теорема о существовании решения задачи Коши. Теорема о единственности решения. Решение, существующие в целом. Естественная параметризация решения. Теорема о дифференци-руемости решения. Первые интегралы. Полная система первых интегралов. Инвариантность линейной и квадратичной форм.										

Сохранение скалярного произведения, определителя матрицы, ортогональности ее столбцов и собственных чисел. Симплектичность. Теорема Пуанкаре о симплектичности фазового потока. Примеры симплектических систем. Изменение фазового объема. Теорема Лиувилля. Консервативные и диссипативные системы. Задача Коши для систем линейных уравнений с постоянными коэффициентами.										
Тема 3. *Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. Сведение к задаче Коши.* Краевые задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Формулировка	10	4	-	-	-	2	6	4	-	4

многоточечной краевой задачи для нормальной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Теорема о вычислительной устойчивости решения краевой задачи. Постановка и решение задачи о переносе граничных условий. Дифференциальная прогонка. Задача Штурма - Лиувилля.										
Тема 4. *Консервативные системы и жесткие задачи.* Гамильтоновы системы. Задача о движении множества взаимодействующих материальных точек. Потенциалы взаимодействия материальных точек. Законы сохранения полного количества	10	4	-	-	-		4	6	-	6

движения, полного момента количества движения, полной нергии, фазового объема. Обратимость решения задачи Коши для гамильтоновых систем во времени. Симплектичность решения задачи о движении множества взаимодействующих материальных точек. Редукция задачи о движении двух материальных точек в задаче о движении материальной точки в центральном поле. Финитные и инфинитные движения, замкнутые и незамкнутые траектории движения в центральном поле. Задача Кеплера. Дополнительные законы сохранения в задаче Кеплера. Точная линеаризация задачи и параметрическое представление решения в виде комбинации										

элементарных функций. Задача трех тел. Частные решения Эйлера и Лагранжа. Хореографические движения. Жесткие задачи Коши. Примеры жестких задач химической кинетики. Линейные жесткие задачи. Сингулярно - возмущенные задачи. Жесткие линейные краевые задачи. Пограничные слои. Жесткие задачи Коши. Примеры жестких задач химической кинетики. Линейные жесткие задачи. Сингулярно-возмущенные задачи. Жесткие линейные краевые задачи. Пограничные слои.										
Тема 5. *Методы качественного анализа решений задачи Коши* Задачи качественного анализа решений задачи Коши.	8	4	-	-	-		4	4	-	4

Фазовый портрет. Особые точки векторного поля. Линеаризованная система уравнений. Матрица Якоби в особой точке. Невырожденная особая точка. Устойчивость особых точек. Теорема Ляпунова об устойчивости по первому приближению. Функция Ляпунова. Достаточные условия устойчивости. Сепарактрисы особых точек. Гомоклинические и гетероклинические траектории. Сепаратрисный контур. Периодические решения. Предельные циклы. Орбитальная устойчивость. Теорема Флоке. Матрица монодромии. Показатели Флоке Теорема об устойчивости периодического решения. Отображение Пуанкаре. Последовательность преобразований Пуанкаре. Инвариантный										

тор. Устойчивость инвариантного тора. Квазипериодические решения. Преобразование Пуанкаре на инвариантном торе. Устойчивость решений задачи Коши. Показатели Ляпунова. Понятие аттрактора. Эргодическое движение. Странный аттрактор										
Тема 6. *Задачи для уравнений в частных производных.* Задачи для гиперболических уравнений. Метод характеристик. Телеграфное и волновое уравнения. Формула Даламбера. Уравнения газовой динамики и акустики. Градиентная катастрофа. Сильные разрывы. Эволюционность сильного разрыва. Волны разрежения. Задача о распаде произвольного разрыва.	12	6	-	-	-	2	8	8	-	8

Задачи для параболических уравнений. Уравнения теплопроводности и диффузии с источником. Неустойчивость Тьюринга. Уравнения диффузии и химических реакций. Явления пространственно-временной самоорганизации. Автоволновые структуры. Задачи для уравнения Шредингера. Задача о свободном движении микрочастицы и ее решение. Задача о взаимодействии микрочастицы с потенциальным барьером. Задача о состояниях водородоподобного атома.										
Устный экзамен										52
Итого	108	24				4	28	28		52

8. Образовательные технологии.

При проведении лекционных занятий предусматривается использование информационных технологий, включающих пакеты математических программ: MATLAB, MATHEMATICA и др. Использование информационных технологий осуществляется, в частности, в процессе реализации активных и интерактивных форм проведения занятий.

9. Учебно-методические материалы для самостоятельной работы по дисциплине (модулю):

Самостоятельная работа учащихся состоит в изучении лекционного материала, учебно-методической литературы, подготовки к текущему контролю и промежуточной аттестации.

Литература для самостоятельной работы студентов в соответствии с тематическим планом.

Тема 1. «Роль дифференциальных уравнений и математического моделирования в научном методе приобретения знаний. Основные виды дифференциальных уравнений. Примеры математических моделей»

1. А. Н. Тихонов, Д. П. Костомаров. Рассказы о прикладной математике. М.: Наука, 1979, 207 с.
2. А. А. Самарский. Вычислительный ксперимент. Вестник АН СССР, 1979, 5, 38
3. А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. Уравнения математической физики М.: Наука, 1966, 724 с.

Тема 2. «Задача Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений и свойства ее решений»

1. В. И. Арнольд. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1971, 239 с.
2. И. Г. Петровский. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1970, 279 с.
3. М. В. Федорюк. Обыкновенные дифференциальные уравнения М.: Наука, 1980, 350 с.
4. Л. Э. Эльсгольц. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Наука, 1969, 424 с.
5. E. Harier, C. Lubich, G. Wanner. Geometric Numerical Integration. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 2002, 515 p.

Тема 3. «Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. Сведение к задаче Коши»

1. С. К. Годунов. Обыкновенные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Краевые задачи. Новосибирск: Изд-во НГУ, 1994, 264 с.
2. Р. П. Федоренко. Введение в вычислительную физику. М.: Изд-во МФТИ, 1994, 526 с.
3. А. А. Абрамов. О переносе граничных условий для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. ЖВМиМФ, 1961, т. 1, 542-545.

Тема 4 «Консервативные системы и жесткие задачи»

1. В. И. Арнольд. Геометрические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Ижевск: Ижевская респ. Типография, 2000, 400 с.
2. E. Harier, C. Lubich, G. Wanner. Geometric Numerical Integration. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 2002, 515 p.
3. Л. Д.Ландау, Е. М. Лифшиц. Механика. 1973, 207 с.
4. Р. П. Федоренко. Введение в вычислительную физику. М.: Изд-во МФТИ, 1994, 526 с.
5. Ю. В. Ракитский, С. М. Устинов, И. Г. Черноруцкий. Численные методы решения жестких систем. М.: Наука, 1979, 208 с.

Тема 5. «Методы качественного анализа решений задачи Коши»

1. А. А. Андронов, Е. А. Леонтович, И. И. Гордон, А. Г. Майер. Теория бифуркаций динамических ситем на плоскости. М.: Наука, 1967, 487 с.

2. Н. Н. Баутин. Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости. М.: Наука, 1984, 176 с.

3. В. В. Немыцкий, В. В. Степанов. Качественная теория дифференциальных уравнений. М.: Едиториал УРСС, 2004, 552 с.

4. Б. Ф. Былов, Р. Э. Виноград, Д. М. Гробман, В. В. Немыцкий. Теория показателей Ляпунова. М. : Наука, 1966, 576 с.

5. И. Г. Малкин. Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966, 530 с.

6. Г. Шустер. Детерминированный хаос. М.: Мир, 1988 240 с.

7. Н. А. Магницкий. Хаотическая динамика нелинейных диссипативных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: МАКС Пресс, 2006, 156 с.

Тема 6. «Задачи для уравнений в частных производных».

1. А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. Уравнения математической физики М.: Наука, 1966, 724 с.

2. Б. Л. Рождественский, Н. Н. Яненко. Системы квазилинейных уравнений. М.: Наука, 1978, 687 с.

3. И. М. Гельфанд. Некоторые задачи теории квазилинейных уравнений. Успехи математических наук, 1959, т. 14, в. 2(86), 87-158

4. В. А. Фок. Начала квантовой механики. М.: Изд-во ЛКИ, 2008, 376 с.

5. В. А. Васильев, Ю. М. Романовский, В. Г. Яхно. Автоволновые процессы в распределенных кинетических системах. УФН, т. 128, в. 4., 626.

10. Ресурсноеобеспечение:

- Перечень основной и вспомогательной учебной литературы ко всему курсу

Основная литература

1. И. Г. Петровский. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1970, 279 с.
2. М. В. Федорюк. Обыкновенные дифференциальные уравнения М.: Наука, 1980, 350 с.
3. Л. Э. Эльсгольц. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Наука, 1969, 424 с.
4. E. Harier, C. Lubich, G. Wanner. Geometric Numerical Integration. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 2002, 515 p.
5. Р. П. Федоренко. Введение в вычислительную физику. М.: Изд-во МФТИ, 1994, 526 с.
6. А. А. Абрамов. О переносе граничных условий для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. ЖВМиМФ, 1961, т. 1, 542-545.
7. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Механика. 1973, 207 с.
8. В. В. Немыцкий, В. В. Степанов. Качественная теория дифференциальных уравнений. М.: Едиториал УРСС, 2004, 552 с.
9. А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. Уравнения математической физики М.: Наука, 1966, 724 с.
10. Б. Л. Рождественский, Н. Н. Яненко. Системы квазилинейных уравнений. М.: Наука, 1978, 687 с.

11. В. А. Фок. Начала квантовой механики. М.: Изд-во ЛКИ, 2008, 376 с.

Дополнительная литература

1. А. А. Самарский. Вычислительный эксперимент. Вестник АН СССР, 1979, 5, 38
2. .А. Н. Тихонов, Д. П. Костомаров. Рассказы о прикладной математике. М. : Наука, 1979, 207 с.
3. С. К. Годунов. Обыкновенные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Краевые задачи. Новосибирск: Изд-во НГУ, 1994, 264 с.
4. А. И. Егоров. Обыкновенные дифференциальные уравнения с приложениями. М.: Физматлит, 2005, 384 с.
5. В. И. Арнольд. Геометрические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Ижевск: Ижевская респ. типография, 2000, 400 с.
6. В. И. Арнольд. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1971, 239 с.
7. Ю. В. Ракитский, С. М. Устинов, И. Г. Черноруцкий. Численные методы решения жестких систем. М.: Наука, 1979, 208 с.
8. А. А. Андронов, Е. А. Леонтович, И. И. Гордон, А. Г. Майер. Теоия бифуркаций динамических ситем на плоскости. М.: Наука, 1967, 487 с.
9. Н. Н. Баутин. Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости. М.: Наука, 1984, 176 с.
10. Б. Ф. Былов, Р. Э. Виноград, Д. М. Гробман, В. В. Немыцкий. Теория показателей Ляпунова. М. : Наука, 1966, 576 с.
11. И. Г. Малкин. Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966, 530 с.
12. Г. Шустер. Детерминированный хаос. М.: Мир, 1988 240 с.
13. Н. А. Магницкий. Хаотическая динамика нелинейных диссипативных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: МАКС Пресс, 2006, 156 с.
14. И. М. Гельфанд. Некоторые задачи теории квазилинейных уравнений. Успехи математических наук, 1959, т. 14, в. 2(86), 87-158
15. В. А. Васильев, Ю. М. Романовский, В. Г. Яхно. Автоволновые процессы в распределенных кинетических 2 1 системах. УФН, т. 128, в. 4., 626.
16. Ф. Хартман. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970, 720 с

- Перечень используемых информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса, включая программное обеспечение, информационные справочные системы (при необходимости):

http://elibrary.ru

www.scopus.com

- Описание материально-технической базы.
  Занятия проводятся в аудитории, оснащенной мультимедийным экраном

11. Язык преподавания – русский

12. Преподаватели: Д.ф.-м.н., профессор Еленин Георгий Георгиевич, elenin2@rambler.ru, 8-495-939-21-95

Фонды оценочных средств, необходимые для оценки результатов обучения

Образцы домашних заданий:

1. Найти первые интегралы системы уравнений:
   $dx_1/dt = x_3$, $dx_2/dt = x_4$, $dx_3/dt = x_1(x_1^2 + x_2^2)^{-1.5}$, $dx_4/dt = x_2(x_1^2 + x_2^2)^{-1.5}$.
2. Исследовать фазовые траектории системы:
   $dx_1/dt = x_1(1 - (x_1^2 + x_2^2)^{0.5})(x_1^2 + x_2^2)^{0.5} - x_2$, $dx_2/dt = x_2(1 - (x_1^2 + x_2^2)^{0.5})(x_1^2 + x_2^2)^{0.5} + x_1$,
3. Определить структуру матрицы 4x4, осуществляющую линейное симплектическое отображение.
4. Подготовить доклад с презентацией на одну из тем курса (по выбору аспиранта).

Список вопросов выносимых на экзамен.

1. Пример формулировки задачи Коши для дифференциальных уравнений в частных производных. Какой процесс описывает решение выбранной задачи?

2. Задача Коши для нормальной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Автономная система. Параметрическая система. Постановка задачи для матрицы-функции. Матрица Якоби потока. Уравнение в вариациях. Разделенная форма уравнений. Специальная разделенная форма. Примеры задач.

3. Формулировка задачи Коши для системы дифференциально-алгебраической системы уравнений. Индекс системы. Примеры задач.

4. Задача Коши для дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. Пример задачи.

5. Теоремы существования, единственности и дифференцируемости решения задачи Коши для нормальной системы обыкновенных дифференциальных уравнениий. Примеры задач, для которых не выполняются условия теорем.

6. Естественная параметризация решений задачи Коши. Выполнить параметризацию для системы “орегонатор”.

7. Векторное поле. Фазовое пространство и расширенное фазовое пространство. Фазовый поток. Уравнение в вариациях. Представление решения. Примеры.

8. Постановка задачи для уравнений второго порядка. Редукция задачи для уравнения высокого порядка к задаче для нормальной системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Примеры задач для уравнений второго порядка.

9. Первые интегралы. Полная система первых интегралов.

10. Инвариантность линейной формы. Сохранение квадратичной формы. Сохранение определителя матрицы и скалярного произведения.

11. Сохранение ортогональности столбцов матрицы. Сохранение собственных чисел матрицы.

12. Симплектическое отображение. Теорема Пуанкаре о симплектичности фазового потока. Примеры симплектических систем.

13. Изменение фазового объема. Теорема Лиувилля. Консервативные и диссипативные системы.

14. Задача Коши для системы линейных неоднородных уравнений. Представление решений. Точные решения задачи для однородных уравнений. Приведение матриц к диагональному виду.

15. Вещественное разложение Шура. Жорданова форма.

16. Многоточечная краевая задача для нормальной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Постановка и решение задачи о переносе условий.

17. Дифференциальная прогонка.

18. Определение собственных значений и собственных функций с помощью переноса граничных условий.

19. Задача Штурма-Лиувилля.

20. “Радиальная” задача о состояниях водородоподобного атома.

23. Одномерное движение в потенциальной яме. Отражение от симметричного потенциального барьера. Движение над потенциальным барьером.

24. Движение материальной точки в плоском центральном поле. Сохранение полной энергии и момента количества движения. Точное решение в виде квадратур. Второй закон Кеплера. Финитные и инфинитные движения. Замкнутые и незамкнутые траектории.

25. Формулировка задачи двух тел. Редукция к задаче о движении в центральном поле.

26. Симплектичность гамильтоновых систем. Теорема Пуанкаре.

27. Сохранение фазового объема в задаче Коши для гамильтоновых систем.

28. Обратимость во времени.

29. Определение жесткой задачи. Примеры жестких задач.

30. Диффузионная неустойчивость А. Тьюринга.

31. Фазовый портрет. Особые точки векторного поля. Линеаризованная система. Матрица Якоби в особой точке. Невырожденная особая точка. Гиперболические особые точки.

32. Устойчивость особых точек. Теорема Ляпунова об устойчивости по первому приближению. Функция Ляпунова. Достаточные условия устойчивости. Примеры особых точек.

33. Сепаратрисы особых точек. Гомоклинические траектории. Гетероклинические траектории. Сепаратрисный контур. Определение инвариантных многообразий гиперболических особых точек.

34. Периодические решения. Предельные циклы. Орбитальная устойчивость. Теорема Флоке. Матрица монодромии. Показатели Флоке. Мультипликаторы цикла.

35. Вычисление мультипликаторов. Теорема об устойчивости периодического решения. Полуустойчивый, гиперболический, седловой, невырожденный предельные циклы.

36. Отображение Пуанкаре. Последовательность преобразований Пуанкаре. Устойчивость неподвижной точки преобразования Пуанкаре.

37. Устойчивость решений задачи Коши. Показатели Ляпунова. Показатели Ляпунова для особой точки, предельного цикла, инвариантного тора.

38. Области притяжения. Поглощающие множества. Аттрактор. Эргодическое движение. Странные аттракторы. Система Лоренца.

Методические материалы для проведения процедур оценивания результатов обучения.

Экзамен проходит по билетам, включающем 2 вопроса. Уровень знаний аспиранта по каждому вопросу на «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно». В случае если на все вопросы был дан ответ, оцененный не ниже чем «удовлетворительно», аспирант получает общую оценку «зачтено».

Особенности организации процесса обучения.

Для эффективного освоения курса рекомендуется перед каждым занятием привести в порядок конспекты лекций. После каждого занятия рекомендуется найти и прочитать дополнительную литературу по теме лекции, придумать примеры, иллюстрирующие основные утверждения, прочитать и дополнить свои конспекты.