

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
**«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ  
М.В.ЛОМОНОСОВА»**  
ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ  
УНИВЕРСИТЕТ МГУ-ППИ В ШЭНЬЧЖЭНЕ



УТВЕРЖДАЮ

Декан факультета ВМК МГУ  
и кибернетики  
Московского государственного  
университета имени М.В.Ломоносова  
Академик

/И.А. Соколов/

«14» сентября 2022 г.

## **ПРОГРАММА-МИНИМУМ**

**кандидатского экзамена по специальности**

### **1.1.4 Теория вероятностей и математическая статистика**

Шифр и наименование области науки: 1.1. Физико-математические науки

Наименование отраслей науки,  
по которым присуждаются ученые степени: Физико-математические науки

**Уровень высшего образования:**  
Подготовка кадров высшей квалификации

Москва 2022

## I. Описание программы:

Настоящая программа охватывает основополагающие разделы и области знания, в основе данной программы лежат следующие дисциплины: теория вероятностей, математическая статистика, теория случайных процессов

Дисциплина, направленная на подготовку к сдаче экзамена кандидатского минимума по специальности 1.1.4. Теория вероятностей и математическая статистика

## II. Основные разделы и вопросы к экзамену:

### 1. Вероятностные меры

1. Алгебры и сигма-алгебры. Конечные и бесконечные измеримые пространства. Теорема Каратеодори о продолжении
2. Примеры наиболее важных для теории вероятностей измеримых пространств  $\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^\infty, \mathbb{R}^T, \dots$
3. Построение вероятностной меры в  $\mathbb{R}^\infty$ . Теорема Колмогорова. Схема Бернулли с бесконечным числом испытаний. Гауссовские последовательности.
4. Вероятностное пространство. Аксиоматика Колмогорова.
5. Измеримые функции. Равномерная сходимост, сходимост почти всюду и сходимост по мере.
6. Определение интеграла Лебега и его связь с интегралом Лебега-Стилтьеса в  $\mathbb{R}^1$ .
7. Мера, определяемая с помощью интеграла Лебега. Производная Радона-Никодима.
8. Произведения мер. Теорема Фубини.
9. Пространства  $L_1$  и  $L_2$  и их характеристики.
10. Сходимост в среднем. Ортогональность или некоррелированност случайных величин. Проекция случайной величины на подпространство, порожденное другими случайными величинами.
11. Независимост событий и сигма-алгебр. Условные вероятности и условные математические ожидания.

### 2. Случайные величины и распределения в $\mathbb{R}^n$

1. Определение и основные свойства функции распределения и характеристической функции случайных величин. Формулы обращения, равенство Парсеваля. Теорема непрерывности.
2. Центральная предельная теорема. Теорема Берри-Эссеена.
3. Безгранично делимые распределения. Представление Леви-Хинчина логарифма характеристической функции безгранично делимого закона.
4. Вероятности больших уклонений.

### 3. Последовательности случайных величин

1. Закон нуля или единицы .
2. Усиленный закон больших чисел.
3. Закон повторного логарифма.
4. Стационарност, эргодичност, теорема Биркгофа-Хинчина .

### 4. Случайные процессы. Распределения в функциональных пространствах

1. Слабая сходимост, относительная компактность и плотност семейств вероятностных мер.
2. Непрерывност и дифференцируемост случайной функции.

3. Процессы с независимыми приращениями. Пуассоновский процесс. Винеровский процесс и свойства его траекторий.
4. Стохастический интеграл от неслучайной функции и его основные свойства. Спектральное представление стационарного в широком смысле процесса и его корреляционной функции. Теорема Бохнера-Хинчина.
5. Линейные преобразования стационарных процессов, интегрирование и дифференцирование. Линейное прогнозирование. Гауссовские процессы.

### 5. Некоторые виды зависимости

1. Мартингалы и полумартингалы. Тождество Вальда.
2. Теоремы о сходимости мартингалов.
3. Цепи Маркова, классификация состояний, условия эргодичности.
4. Процессы рождения и гибели, ветвящиеся процессы, скачкообразные процессы.
5. Марковские процессы и полугруппы. Уравнения Колмогорова.

### 6. Стохастическое исчисление и диффузионные процессы

1. Стохастический интеграл. Формула Ито.
2. Существование и единственность решений стохастических дифференциальных уравнений.
3. Исследование распределений функционалов от диффузионных процессов с помощью дифференциальных уравнений.

### 7. Элементы математической статистики

1. Достаточные статистики и сигма-алгебры. Критерий факторизации.
2. Полнота семейств распределений. Экспоненциальные семейства.
3. Теорема Рао -Блекуэлла - Колмогорова. Использование для построения наилучшей несмещенной оценки
4. Несмещенность. Несмещенные оценки с минимальной дисперсией. Неравенство Рао-Крамера.
5. Метод максимального правдоподобия. Асимптотические свойства оценок максимального правдоподобия.
6. Простая гипотеза. Критерий для проверки простых гипотез. Ошибки 1-го и 2-го родов. Мощность критерия. Лемма Неймана- Пирсона.

## III. Критерии оценивания

Критерии и показатели оценивания ответа на экзамене			
неудовлетворительно (2)	удовлетворительно (3)	хорошо (4)	отлично (5)
Отсутствие знаний по вопросам предметной области «Теория вероятностей и математическая статистика»	Фрагментарные знания по вопросам предметной области «Теория вероятностей и математическая статистика»	Общие, но не структурированные знания по вопросам предметной области «Теория вероятностей и математическая статистика»	Сформированные систематические знания по вопросам предметной области «Теория вероятностей и математическая статистика»

## IV. Рекомендуемая основная литература:

1. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функции и функционального анализа. М.:ФИЗМАТЛИТ, 2004 г.
2. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т.1 М.:Мир, 1984 г.
3. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т.2 М.:Мир, 1984 г.

4. Боровков А.А. Математическая статистика. М.:УРСС, 2010.
5. Вентцель А.Д. Курс теории случайных процессов. М.:ФИЗМАТЛИТ, 1996 г.
6. Ширяев А.Н. Вероятность. (в двух книгах) М.:МЦНМО, 2007 г.
7. Боровков А.А. Теория вероятностей. М.:УРСС, 2009 г.
8. Гихман И.И. Скороход А.В. Введение в теорию случайных процессов М.Наука, 1977 г.
9. Крамер Г. Математические методы статистики. М.:Мир, 1975 г.
10. Прохоров Ю.В., Розанов Ю. А. Теория вероятностей. М.Наука, 1987 г.

#### **Дополнительная литература**

1. Энциклопедия «Вероятность и математическая статистика». Под ред. Ю. В. Прохорова. М. Российская Энциклопедия, 1999.

#### **VI. Авторы программы:**

Королев В. Ю.	д.ф.-м.н.	профессор
Бенинг В. Е.	д.ф.-м.н.	профессор
Беляев К.П.	д.ф.-м.н.	профессор
Борисов А.В.	д.ф.-м.н.	доцент
Горшенин А.К.	д.ф.-м.н.	доцент
Захарова Т.В.	к.ф.-м.н.	доцент
Ушаков В. Г.	д.ф.-м.н.	профессор
Хохлов Ю. С,	д.ф.-м.н.	профессор
Шевцова И.Г.	д.ф.-м.н.	профессор
Шестаков О. В.	д.ф.-м.н.	профессор