

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М.В.ЛОМОНОСОВА»

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ  
УНИВЕРСИТЕТ МГУ-ППИ В ШЭНЬЧЖЭНЕ



УТВЕРЖДАЮ

Декан факультета ВМК МГУ  
Академик

/И.А. Соколов/

«14» сентября 2022 г.

### **РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)**

*направленная на подготовку к сдаче экзамена кандидатского минимума по специальности  
1.1.5. «Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика»*

**Уровень высшего образования:**  
Подготовка кадров высшей квалификации

Москва 2022

Рабочая программа дисциплины разработана в соответствии с паспортом специальности 1.1.2 – «Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика» (физико-математические науки) и «Требованиями к основным программам подготовки научных и научно-педагогических кадров в аспирантуре, самостоятельно устанавливаемым Московским государственным университетом имени М.В. Ломоносова», утвержденными приказом ректора МГУ № 1216 от 24.11.2021 г.

1. Краткая аннотация:

Специальность 1.1.5. «Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика»

Цель изучения дисциплины – получение аспирантами теоретических знаний в по следующим областям математическое программирование, исследование операций, теория игр, оптимальное управление, дискретная оптимизация, теория функциональных систем, комбинаторный анализ, теория графов, теория кодирования, управляющие системы, дизъюнктивные нормальные формы, синтез и сложность управляющих систем, эквивалентные преобразования управляющих систем, надежность и контроль функционирования управляющих систем, математическая экономика. Подготовка аспирантов к сдаче экзамена по специальности 1.1.5 – «Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика».

2. Уровень высшего образования – подготовка кадров высшей квалификации

3. Научная специальность: 1.1.2 – «Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика», область науки: физико-математические науки

4. Место дисциплины (модуля) в структуре Программы аспирантуры: *Дисциплина, направленная на подготовку к сдаче экзамена кандидатского минимума по специальности 1.1.2 «Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика»*

5. Объем дисциплины (модуля) в зачетных единицах с указанием количества академических или астрономических часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу обучающихся:

Объем дисциплины (модуля) составляет 3 зачетных единицы, всего 108 часов, из которых 36 часов составляет контактная работа студента с преподавателем (36 часов занятия лекционного типа), 72 часа составляет самостоятельная работа учащегося.

6. Входные требования для освоения дисциплины (модуля), предварительные условия.

На предыдущих уровнях высшего образования должны быть освоены общие курсы: обыкновенные дифференциальные уравнения, уравнения с частными производными, функциональный анализ.

7. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам

Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины (модуля), форма промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)	Всего (часы)	В том числе								
		Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы из них					Самостоятельная работа обучающегося, часы из них			
		Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа	Групповые консультации	Индивидуальные консультации	Учебные занятия, направленные на проведение текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации	Всего	Выполнение домашних заданий	Чтение учебной и научной литературы	Всего
<p><b>Тема Исследование операций, теория игр.</b>  Математическое программирование  Антагонистические игры.  Матричные игры, теорема о минимаксе. Выпукло-вогнутые антагонистические игры. Теорема существования седловой точки.  Бескоалиционные игры n лиц.  Равновесие по Нэшу. Принцип гарантированного результата.  Минимаксные задачи.</p>	34	10	-	-	-		10	10	14	24

<p>Многокритериальная оптимизация. Оптимальность по Парето. Лексикографический подход. Кооперативные игры (с-ядро, вектор Шепли).          Задача распределения ресурсов (модель Гросса, принцип уравнивания Гермейера).          Иерархические игры.          Потоки в сетях (теорема Форда-Фалкерсона, задача и алгоритмы поиска кратчайшего пути в графе, задача составления расписаний, транспортная задача).</p>										
<p><b>Тема 2. Оптимальное управление и дискретная оптимизация</b>  <i>Постановка задач оптимального управления, их классификация.</i>  <i>Принцип максимума Понтрягина.</i>  <i>Краевая задача принципа максимума.</i>  <i>Линейная задача быстрогодействия, ее свойства (существование решения, число переключений).</i>  <i>Принцип максимума и вариационное исчисление.</i>  <i>Управляемость и наблюдаемость в линейных системах, их взаимосвязь</i></p>	34	10	-	-	-	-	10	10	14	24

<p><i>(взаимодвойственность). Теоремы Калмана, Красовского. Метод динамической регуляризации в задаче наблюдения. Дифференциальные игры. Целочисленное линейное программирование (метод Гомори, свойства унимодулярности матрицы ограничений). Метод ветвей и границ (на примере задач целочисленного или булева линейного программирования). Временная сложность решения задач дискретной оптимизации. Основные классы сложности (P, NP, NPC). NP–трудные задачи (задача о рюкзаке, задача коммивояжера). Проблема полноты. Теорема о полноте систем функций двузначной логики <math>P_2</math>. Алгоритм распознавания полноты систем функций k-значной логики <math>P_k</math>. Теорема Слупецкого. Особенности k-значных логик. Автоматы. Регулярные события и их представление в автоматах.</i></p>											
--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

<p><i>Эксперименты с автоматами.</i>  <i>Алгоритмическая неразрешимость проблемы полноты для автоматов.</i>  8. <i>Вычислимые функции.</i>  <i>Эквивалентность класса рекурсивных функций и класса функций, вычислимых на машинах Тьюринга.</i>  <i>Комбинаторный анализ и теория графов Теория кодирования Управляющие системы Дизъюнктивные нормальные формы</i></p>										
<p><b>Тема 3. Синтез и сложность управляющих систем</b>  <i>Асимптотически оптимальный метод синтеза схем из функциональных элементов.</i>  <i>Асимптотически оптимальный метод синтеза контактных схем.</i>  <i>Инвариантные классы и их свойства.</i>  <i>Синтез схем для функций из некоторых инвариантных классов.</i>  <i>Эквивалентные преобразования управляющих систем Надежность и контроль функционирования управляющих систем Построение самокорректирующихся контактных схем из ненадежных</i></p>	40	16					16	10	14	24

<i>контактов. Логический подход к контролю исправности и диагностике неисправностей управляющих систем. Тесты для таблиц. Математическая экономика</i>										
<b>4. Промежуточная аттестация допуск к кандидатскому экзамену</b>										
<b>Итого</b>	108	36					36	30	42	72

## 8. Образовательные технологии.

Проводятся лекции с использованием мультимедийной техники; лекции-демонстрации.

## 9. Учебно-методические материалы для самостоятельной работы по дисциплине (модулю):

Самостоятельная работа учащихся состоит в изучении лекционного материала, учебно-методической литературы, подготовки к текущему контролю и промежуточной аттестации.

## 10. Ресурсное обеспечение:

- Перечень основной и вспомогательной учебной литературы ко всему курсу

### **Основная литература**

1. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику. М.: Высшая школа, 2001 г.
2. Алексеев В.Б. Лекции по дискретной математике. М.: Инфра, 2012.
3. Марченков С.С. Избранные главы дискретной математики. М.: МАКС Пресс, 2016.
4. Кудрявцев В.В., Алешин С.В., Подколзин А.С. Введение в теорию автоматов. М.: Наука, 1985 г.
5. Мальцев А.И. Алгоритмы и вычислимые функции. М.: Наука, 1986 г.
6. Bondy J.A., Murty U.S.R. Graph theory. Springer, 2008.
7. Чашкин А.В. Лекции по дискретной математике. М.: Изд-во механико-математического факультета МГУ, 2007.
8. Лидл Р., Нидеррайтер Г. Конечные поля. Том 1. М.: Мир, 1988.
9. Ложкин С.А. Лекции по основам кибернетики. М.: МАКС Пресс, 2004.
10. Яблонский С.В. Элементы математической кибернетики. М.: Высшая Школа, 2007.
11. Кострикин А.Н. Введение в алгебру. Основы алгебры. М.: МЦНМО, 2018 г.
12. Гермейер Ю.Б. Введение в теорию исследования операций. М.: Наука, 1976 г.
13. Сухарев А.Г., Тимохов А.В., Федоров В.В. Курс методов оптимизации. М.: Юрайт, 2014 г.
14. Васильев Ф.П. Методы оптимизации. М.: Факториал, 2002 г.
15. Карманов В.Г. Математическое программирование. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004 г.
16. Понтрягин Л.С. Избранные научные труды. Том 2. М.: Наука, 1988 г.
17. Тихомиров В.М., Фомин С.В., Алексеев В.М. Оптимальное управление. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2018 г.
18. Краснощеков П.С., Петров А.А. Принципы построения моделей. М.: Фазис, 2002 г.
19. Подиновский В.В., Ногин В.Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007 г.
20. Морозов В.В. Основы теории игр. М.: Издательство МГУ, 2002 г.
21. Пападимитриу Х., Стайглиц К. Комбинаторная оптимизация. М.: Мир, 1985 г.
22. Никайдо Х. Выпуклые структуры и математическая экономика. М.: Мир, 1972 г.
23. Ашманов С.А. Введение в математическую экономику. М.: Наука, 1984 г.
24. Экланд И. Элементы математической экономики. М.: Мир, 1983 г.
25. Обен Ж.-П. Нелинейный анализ и его экономические приложения. М.: Мир, 1988 г.
26. Маршалл А., Олкин И. Неравенства, теория мажоризации и ее приложения. М.: Мир, 1983 г.
27. Мельников А.В. Стохастический анализ и расчет производных ценных бумаг. М.: ТВП, 1997 г.

### **Дополнительная литература**

1. Мак-Вильмс Ф., Слоэн Н. Теория кодов, исправляющих ошибки. М.: Связь, 1979 г.
2. Лупанов О.Б. Асимптотические оценки сложности управляющих систем. М.: Издательство МГУ, 1984 г.
3. Сзведж Дж.Э. Сложность вычислений. М.: Факториал, 1998 г.
4. Марков А.А. Введение в теорию кодирования. М.: Наука, 1982 г.
5. Редькин Н.П. Надежность и диагностика схем. М.: Издательство МГУ, 1992 г.
6. Соловьев Н.А. Тесты (теория, построение, применения). М.: Наука, 1978 г.
7. Поляк Б.Т. Введение в оптимизацию. М.: Ленанд, 2019 г.
8. Избранные труды С.В. Яблонского. М.: МАКС Пресс, 2004.

1. Перечень используемых информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса, включая программное обеспечение,



информационные справочные системы (при наличии): Интернет, российские и международные библиотеки и базы данных:

Общероссийский портал Math-Net.Ru,  
Научная электронная библиотека Elibrary (www.elibrary.ru) и другие.

## 2. Описание материально-технической базы.

Занятия проводятся в аудитории, оснащенной проектором, экраном, ноутбуком, лазерной указкой, досками для мела/маркеров.

11. Язык преподавания – русский

12. Преподаватели:

Алексеев В.Б.	д.ф.-м.н.	профессор
Вороненко А.А.	д.ф.-м.н.	профессор
Ложкин С.А.	д.ф.-м.н.	профессор
Марченков С.С.	д.ф.-м.н.	профессор
Селезнева С.Н.	д.ф.-м.н.	доцент

### **Фонды оценочных средств, необходимые для оценки результатов обучения**

Примеры вопросов для промежуточной аттестации – допуска к кандидатскому экзамену:

1. Теоремы о достижении нижней грани функции (функционала) на множестве (в  $E^N$ , в метрических пространствах, в гильбертовых пространствах).
2. Выпуклые множества, выпуклые функции, сильно выпуклые функции, их свойства.
3. Критерии оптимальности в гладких выпуклых задачах минимизации (в форме вариационного неравенства  $\langle f'(x_*), x - x_* \rangle \geq 0 \forall x \in X$ ).
4. Правило множителей Лагранжа.
5. Теорема Куна-Таккера, двойственная задача, ее свойства.
6. Метод проекции градиента (в  $E^N$ , в гильбертовом пространстве).
7. Метод Ньютона.
8. Метод покоординатного спуска.
9. Метод штрафных функций.
10. Метод барьерных функций.
11. Метод динамического программирования.
12. Устойчивость задач оптимизации. Метод стабилизации (регуляризация по Тихонову).

### 13. Линейное программирование. Симплекс-метод. Двойственные задачи линейного программирования.

1. Антагонистические игры. Матричные игры, теорема о минимаксе.
2. Выпукло-вогнутые антагонистические игры. Теорема существования седловой точки.
3. Бескоалиционные игры  $n$  лиц. Равновесие по Нэшу.
4. Принцип гарантированного результата. Минимаксные задачи.
5. Многокритериальная оптимизация. Оптимальность по Парето. Лексикографический подход.
6. Кооперативные игры ( $s$ -ядро, вектор Шепли).
7. Задача распределения ресурсов (модель Гросса, принцип уравнивания Гермейера).
8. Иерархические игры.
9. Потоки в сетях (теорема Форда-Фалкерсона, задача и алгоритмы поиска кратчайшего пути в графе, задача составления расписаний, транспортная задача).
10. Постановка задач оптимального управления, их классификация.
11. Принцип максимума Понтрягина. Краевая задача принципа максимума.
12. Линейная задача быстрогодействия, ее свойства (существование решения, число переключений).
13. Принцип максимума и вариационное исчисление.
14. Управляемость и наблюдаемость в линейных системах, их взаимосвязь (взаимодвойственность). Теоремы Калмана, Красовского.
15. Метод динамической регуляризации в задаче наблюдения.
16. Дифференциальные игры.
17. Целочисленное линейное программирование (метод Гомори, свойства унимодулярности матрицы ограничений).
18. Метод ветвей и границ (на примере задач целочисленного или булева линейного программирования).
19. Временная сложность решения задач дискретной оптимизации. Основные классы сложности ( $P$ ,  $NP$ ,  $NPC$ ).
20.  $NP$ -трудные задачи (задача о рюкзаке, задача коммивояжера).
21. Проблема полноты. Теорема о полноте систем функций двузначной логики  $P_2$ .
22. Алгоритм распознавания полноты систем функций  $k$ -значной логики  $P_k$ .
23. Теорема Слупецкого.
24. Особенности  $k$ -значных логик.
25. Автоматы. Регулярные события и их представление в автоматах.
26. Эксперименты с автоматами.
27. Алгоритмическая неразрешимость проблемы полноты для автоматов.
28. Вычислимые функции. Эквивалентность класса рекурсивных функций и класса функций, вычислимых на машинах Тьюринга.
29. Алгоритмическая неразрешимость проблемы эквивалентности слов в ассоциативных исчислениях.
30. Основные комбинаторные числа.
31. Оценки и асимптотики для комбинаторных чисел.
32. Графы и сети. Оценки числа графов и сетей различных типов.
33. Плоские и планарные графы. Формула Эйлера для плоских графов. Необходимые условия планарности в теореме Понтрягина-Куратовского (без доказательства достаточности).
34. Экстремальная теория графов. Теорема Турана.
35. Теорема Рамсея.
36. Алфавитное кодирование. Критерии однозначности декодирования. Неравенство Крафта-Макмиллана.
37. Оптимальное кодирование. Построение кодов с минимальной избыточностью.
38. Самокорректирующиеся коды. Граница упаковки. Коды Хемминга, исправляющие единичную ошибку.
39. Конечные поля и их основные свойства.
40. Коды Боуза—Чоудхури—Хоквингема.

41. Понятие управляющей системы. Основные модельные классы управляющих систем: дизъюнктивные нормальные формы, формулы, контактные схемы, схемы из функциональных элементов, автоматы, машины Тьюринга. Основные проблемы теории управляющих систем.
42. Проблема минимизации булевых функций. Дизъюнктивные нормальные формы (ДНФ). Постановка задачи в геометрической форме.
43. Локальные алгоритмы построения ДНФ. Построение ДНФ  $\Sigma T$  («сумма тупиковых») с помощью локального алгоритма.
44. Невозможность построения ДНФ  $\Sigma M$  («сумма минимальных») в классе локальных алгоритмов.
45. Асимптотически оптимальный метод синтеза схем из функциональных элементов.
46. Асимптотически оптимальный метод синтеза контактных схем.
47. Инвариантные классы и их свойства.
48. Синтез схем для функций из некоторых инвариантных классов.
49. Нижние оценки сложности реализации булевых функций контактными и параллельно-последовательными контактными схемами.
50. Нижние оценки сложности реализации булевых функций формулами в произвольном базисе.
51. Эквивалентные преобразования формул двузначной логики  $P_2$ .
52. Эквивалентные преобразования контактных схем.
53. Эквивалентные преобразования автоматов.
54. Пример Линдона.
55. Построение самокорректирующихся контактных схем из ненадежных контактов.
56. Логический подход к контролю исправности и диагностике неисправностей управляющих систем. Тесты для таблиц.
57. Модель межотраслевого баланса В.В. Леонтьева. Продуктивные матрицы. Критерии продуктивности. Теорема Фробениуса-Перрона. Свойства числа Фробениуса-Перрона. Теорема об устойчивости примитивных матриц.
58. Динамическая модель В.В. Леонтьева. Теорема о магистрали Моришимы. Экономическая интерпретация вектора Фробениуса-Перрона.
59. Линейные задачи оптимального распределения ресурсов. Экономическая интерпретация двойственности в задачах линейного программирования.
60. Модель Кокса-Росса-Рубинштейна. Оценка стоимости опциона.
61. Модель олигополистической конкуренции Курно. Теорема Нэша.
62. Модель Эрроу-Дебре. Конкурентное равновесие. Сведение вопроса о существовании конкурентного равновесия к решению задачи дополненности. Замкнутость отображений спроса и предложения. Теорема Эрроу-Дебре.
63. Неподвижные точки. Теоремы Брауэра и Какутани. Лемма Гейла-Никайдо-Дебре. Теорема Фань-Цзы.
64. Оптимальность по Парето конкурентного равновесия (первая теорема теории благосостояния). Теорема Дебре (вторая теорема теории благосостояния). Сравнительная статика в моделях конкурентного равновесия.
65. Проблемы коллективного выбора. Парадокс Эрроу.
66. Индексы неравенства и кривая Лоренца. Теорема мажоризации.

### **Методические материалы для проведения процедур оценивания результатов обучения**

Аспиранту задают 2 вопроса из перечня вопросов для промежуточной аттестации.

Преподаватели оценивают уровень знаний аспиранта. В случае удовлетворительного ответа на все вопросы аспирант получает допуск к сдаче кандидатского экзамена по специальности.