

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
**«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ
М.В.ЛОМОНОСОВА»**
ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ
УНИВЕРСИТЕТ МГУ-ППИ В ШЭНЬЧЖЭНЕ

УТВЕРЖДАЮ

Декан факультета ВМК МГУ,
и кибернетики
Московского государственного
университета
имени М.В.Ломоносова
Академик

/И.А. Соколов/

«14» сентября 2022 г.

ПРОГРАММА-МИНИМУМ
кандидатского экзамена по специальности
1.1.5 Математическая логика, алгебра, теория чисел
и дискретная математика

Шифр и наименование области науки: 1.1. Физико-математические науки

Наименование отраслей науки,
по которым присуждаются ученые степени: Физико-математические науки

Уровень высшего образования:
Подготовка кадров высшей квалификации

Москва 2022

I. Описание программы:

Настоящая программа охватывает основополагающие разделы и области знания, в основе данной программы лежат следующие дисциплины: теория вероятностей, математическая статистика, теория случайных процессов

Дисциплина, направленная на подготовку к сдаче экзамена кандидатского минимума по специальности 1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика

II. Основные разделы и вопросы к экзамену:

1. Математическое программирование

1. Теоремы о достижении нижней грани функции (функционала) на множестве (в E^N , в метрических пространствах, в гильбертовых пространствах).
2. Выпуклые множества, выпуклые функции, сильно выпуклые функции, их свойства.
3. Критерии оптимальности в гладких выпуклых задачах минимизации (в форме вариационного неравенства $\langle f'(x^*), x - x^* \rangle \geq 0 \forall x \text{ из } X$).
4. Правило множителей Лагранжа.
5. Теорема Куна-Таккера, двойственная задача, ее свойства.
6. Метод проекции градиента (в E^N , в гильбертовом пространстве).
7. Метод Ньютона.
8. Метод покоординатного спуска.
9. Метод штрафных функций.
10. Метод барьерных функций.
11. Метод динамического программирования.
12. Устойчивость задач оптимизации. Метод стабилизации (регуляризация по Тихонову).
13. Линейное программирование. Симплекс-метод. Двойственные задачи линейного программирования.

2. Исследование операций, теория игр

1. Антагонистические игры. Матричные игры, теорема о минимаксе.
2. Выпукло-вогнутые антагонистические игры. Теорема существования седловой точки.
3. Бескоалиционные игры n лиц. Равновесие по Нэшу.
4. Принцип гарантированного результата. Минимаксные задачи.
5. Многокритериальная оптимизация. Оптимальность по Парето. Лексикографический подход.
6. Кооперативные игры (с-ядро, вектор Шепли).
7. Задача распределения ресурсов (модель Гросса, принцип уравнивания Гермейера).
8. Иерархические игры.
9. Потoki в сетях (теорема Форда-Фалкерсона, задача и алгоритмы поиска кратчайшего пути в графе, задача составления расписаний, транспортная задача).

3. Оптимальное управление

1. Постановка задач оптимального управления, их классификация.
2. Принцип максимума Понтрягина. Краевая задача принципа максимума.
3. Линейная задача быстрого действия, ее свойства (существование решения, число переключений).
4. Принцип максимума и вариационное исчисление.
5. Управляемость и наблюдаемость в линейных системах, их взаимосвязь (взаимодвойственность). Теоремы Калмана, Красовского.
6. Метод динамической регуляризации в задаче наблюдения.
7. Дифференциальные игры.

4. Дискретная оптимизация

1. Целочисленное линейное программирование (метод Гомори, свойства унимодулярности матрицы ограничений).
2. Метод ветвей и границ (на примере задач целочисленного или булева линейного программирования).
3. Временная сложность решения задач дискретной оптимизации. Основные классы сложности (P, NP, NPC).
4. NP–трудные задачи (задача о рюкзаке, задача коммивояжера).

5. Теория функциональных систем

1. Проблема полноты. Теорема о полноте систем функций двузначной логики P_2 .
2. Алгоритм распознавания полноты систем функций k -значной логики P_k .
3. Теорема Слупецкого.
4. Особенности k -значных логик.
5. Автоматы. Регулярные события и их представление в автоматах.
6. Эксперименты с автоматами.
7. Алгоритмическая неразрешимость проблемы полноты для автоматов.
8. Вычислимые функции. Эквивалентность класса рекурсивных функций и класса функций, вычислимых на машинах Тьюринга.
9. Алгоритмическая неразрешимость проблемы эквивалентности слов в ассоциативных исчислениях.

6. Комбинаторный анализ и теория графов

1. Основные комбинаторные числа.
2. Оценки и асимптотики для комбинаторных чисел.
3. Графы и сети. Оценки числа графов и сетей различных типов.
4. Плоские и планарные графы. Формула Эйлера для плоских графов. Необходимые условия планарности в теореме Понтрягина-Куратовского (без доказательства достаточности).
5. Экстремальная теория графов. Теорема Турана.
6. Теорема Рамсея.

7. Теория кодирования

1. Алфавитное кодирование. Критерии однозначности декодирования. Неравенство Крафта-Макмиллана.
2. Оптимальное кодирование. Построение кодов с минимальной избыточностью.
3. Самокорректирующиеся коды. Граница упаковки. Коды Хемминга, исправляющие единичную ошибку.
4. Конечные поля и их основные свойства.
5. Коды Боуза—Чоудхури—Хоквингема.

8. Управляющие системы

Понятие управляющей системы. Основные модельные классы управляющих систем: дизъюнктивные нормальные формы, формулы, контактные схемы, схемы из функциональных элементов, автоматы, машины Тьюринга. Основные проблемы теории управляющих систем.

9. Дизъюнктивные нормальные формы

1. Проблема минимизации булевых функций. Дизъюнктивные нормальные формы (ДНФ). Постановка задачи в геометрической форме.
2. Локальные алгоритмы построения ДНФ. Построение ДНФ ΣT («сумма тупиковых») с помощью локального алгоритма.
3. Невозможность построения ДНФ ΣM («сумма минимальных») в классе локальных алгоритмов.

10. Синтез и сложность управляющих систем

1. Асимптотически оптимальный метод синтеза схем из функциональных элементов.
2. Асимптотически оптимальный метод синтеза контактных схем.
3. Инвариантные классы и их свойства.
4. Синтез схем для функций из некоторых инвариантных классов.
5. Нижние оценки сложности реализации булевых функций контактными и параллельно-последовательными контактными схемами.
6. Нижние оценки сложности реализации булевых функций формулами в произвольном базисе.

11. Эквивалентные преобразования управляющих систем

1. Эквивалентные преобразования формул двузначной логики P_2 .
2. Эквивалентные преобразования контактных схем.
3. Эквивалентные преобразования автоматов.
4. Пример Линдона.

12. Надежность и контроль функционирования управляющих систем

1. Построение самокорректирующихся контактных схем из ненадежных контактов.
2. Логический подход к контролю исправности и диагностике неисправностей управляющих систем. Тесты для таблиц.

13. Математическая экономика

1. Модель межотраслевого баланса В.В. Леонтьева. Продуктивные матрицы. Критерии продуктивности. Теорема Фробениуса-Перрона. Свойства числа Фробениуса-Перрона. Теорема об устойчивости примитивных матриц.
2. Динамическая модель В.В. Леонтьева. Теорема о магистрали Моришимы. Экономическая интерпретация вектора Фробениуса-Перрона.
3. Линейные задачи оптимального распределения ресурсов. Экономическая интерпретация двойственности в задачах линейного программирования.
4. Модель Кокса-Росса-Рубинштейна. Оценка стоимости опциона.
5. Модель олигополистической конкуренции Курно. Теорема Нэша.
6. Модель Эрроу-Дебре. Конкурентное равновесие. Сведение вопроса о существовании конкурентного равновесия к решению задачи дополнительности. Замкнутость отображений спроса и предложения. Теорема Эрроу-Дебре.
7. Неподвижные точки. Теоремы Брауэра и Какутани. Лемма Гейла-Никайдо-Дебре. Теорема Фань-Цзы.
8. Оптимальность по Парето конкурентного равновесия (первая теорема теории благосостояния). Теорема Дебре (вторая теорема теории благосостояния). Сравнительная статика в моделях конкурентного равновесия.

9. Проблемы коллективного выбора. Парадокс Эрроу.
10. Индексы неравенства и кривая Лоренца. Теорема мажоризации.

III. Критерии оценивания

Критерии и показатели оценивания ответа на экзамене			
неудовлетворительно (2)	удовлетворительно (3)	хорошо (4)	отлично (5)
Отсутствие знаний по вопросам предметной области «Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика»	Фрагментарные знания по вопросам предметной области «Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика»	Общие, но не структурированные знания по вопросам предметной области «Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика»	Сформированные систематические знания по вопросам предметной области «Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика»

IV. Рекомендуемая основная литература:

Основная литература

1. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику. М.: Высшая школа, 2001 г.
2. Алексеев В.Б. Лекции по дискретной математике. М.: Инфра, 2012.
3. Марченков С.С. Избранные главы дискретной математики. М.: МАКС Пресс, 2016.
4. Кудрявцев В.В., Алешин С.В., Подколзин А.С. Введение в теорию автоматов. М.: Наука, 1985 г.
5. Мальцев А.И. Алгоритмы и вычислимые функции. М.: Наука, 1986 г.
6. Bondy J.A., Murty U.S.R. Graph theory. Springer, 2008.
7. Чашкин А.В. Лекции по дискретной математике. М.: Изд-во механико-математического факультета МГУ, 2007.
8. Лидл Р., Нидеррайтер Г. Конечные поля. Том 1. М.: Мир, 1988.
9. Ложкин С.А. Лекции по основам кибернетики. М.: МАКС Пресс, 2004.
10. Яблонский С.В. Элементы математической кибернетики. М.: Высшая Школа, 2007.
11. Кострикин А.Н. Введение в алгебру. Основы алгебры. М.: МЦНМО, 2018 г.
12. Гермейер Ю.Б. Введение в теорию исследования операций. М.: Наука, 1976 г.
13. Сухарев А.Г., Тимохов А.В., Федоров В.В. Курс методов оптимизации. М.: Юрайт, 2014 г.
14. Васильев Ф.П. Методы оптимизации. М.: Факториал, 2002 г.
15. Карманов В.Г. Математическое программирование. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004 г.
16. Понтрягин Л.С. Избранные научные труды. Том 2. М.: Наука, 1988 г.
17. Тихомиров В.М., Фомин С.В., Алексеев В.М. Оптимальное управление. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2018 г.
18. Краснощеков П.С., Петров А.А. Принципы построения моделей. М.: Фазис, 2002 г.
19. Подиновский В.В., Ногин В.Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007 г.
20. Морозов В.В. Основы теории игр. М.: Издательство МГУ, 2002 г.
21. Пападимитриу Х., Стайглиц К. Комбинаторная оптимизация. М.: Мир, 1985 г.
22. Никайдо Х. Выпуклые структуры и математическая экономика. М.: Мир, 1972 г.
23. Ашманов С.А. Введение в математическую экономику. М.: Наука, 1984 г.
24. Экланд И. Элементы математической экономики. М.: Мир, 1983 г.
25. Обен Ж.-П. Нелинейный анализ и его экономические приложения. М.: Мир, 1988 г.
26. Маршалл А., Олкин И. Неравенства, теория мажоризации и ее приложения. М.: Мир, 1983 г.

27. Мельников А.В. Стохастический анализ и расчет производных ценных бумаг. М.: ТВП, 1997 г.

Дополнительная литература

1. Мак-Вильмс Ф., Слоэн Н. Теория кодов, исправляющих ошибки. М.: Связь, 1979 г.
2. Лупанов О.Б. Асимптотические оценки сложности управляющих систем. М.: Издательство МГУ, 1984 г.
3. Сэведж Дж.Э. Сложность вычислений. М.: Факториал, 1998 г.
4. Марков А.А. Введение в теорию кодирования. М.: Наука, 1982 г.
5. Редькин Н.П. Надежность и диагностика схем. М.: Издательство МГУ, 1992 г.
6. Соловьев Н.А. Тесты (теория, построение, применения). М.: Наука, 1978 г.
7. Поляк Б.Т. Введение в оптимизацию. М.: Ленанд, 2019 г.
8. Избранные труды С.В. Яблонского. М.: МАКС Пресс, 2004.

VI. Авторы программы:

Алексеев В.Б.	д.ф.-м.н.	профессор
Вороненко А.А.	д.ф.-м.н.	профессор
Ложкин С.А.	д.ф.-м.н.	профессор
Марченков С.С.	д.ф.-м.н.	профессор
Селезнева С.Н.	д.ф.-м.н.	доцент