

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М.В.ЛОМОНОСОВА»  
ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ  
УНИВЕРСИТЕТ МГУ-ППИ В ШЭНЬЧЖЭНЕ



УТВЕРЖДАЮ  
Декан факультета ВМК МГУ,  
Академик /И.А. Соколов/  
«14» сентября 2022 г.

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)**

Поля, кольца, идеалы  
Fields, rings, ideals

**Уровень высшего образования:**  
Подготовка кадров высшей квалификации

Москва 2022

Рабочая программа дисциплины разработана в соответствии с Приказом Ректора МГУ №1216 от 24 ноября 2021 года «Об утверждении Требований к основным программам подготовки научных и научно-педагогических кадров в аспирантуре, самостоятельно устанавливаемых Московским государственным университетом имени М.В. Ломоносова»

1. Краткая аннотация:

**Название дисциплины** Поля, кольца, идеалы

**Цель** изучения дисциплины – В курсе рассматриваются основные понятия алгебры, необходимые для работы в различных направлениях математики и ее применений. Изучаются поля, их расширения, группы Галуа, коммутативные кольца и их идеалы, базисы Гребнера, теоремы Гильберта о базисе и о нулях.

2. Уровень высшего образования – аспирантура

3. Научная специальность:

1.1.6. «Вычислительная математика»

область науки: **физико-математические науки**

4. Место дисциплины (модуля) в структуре Программы аспирантуры: элективный курс.

5. *Объем дисциплины (модуля) составляет 2 зачетные единицы, всего 108 часов, из которых 40 часов составляет контактная работа студента с преподавателем (36 часов занятия лекционного типа, 4 часов мероприятия текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации), 68 часов составляет самостоятельная работа учащегося.*

6. Входные требования для освоения дисциплины (модуля), предварительные условия.

На предыдущих уровнях высшего образования должны быть освоены общие курсы:

1. Алгебра и геометрия

2. Математический анализ

3. Функциональный анализ

7. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам

Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины (модуля),  форма промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)	Всего (часы)	В том числе								
		Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы						Самостоятельная работа обучающегося, часы		
		из них						из них		
Занятия лекционно-го типа	Занятия семинарско-го типа	Групповые консультации	Индивидуальные консультации	Учебные занятия, направленные на проведение текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации	Всего	Выполнение домашних заданий	Подготовка к коллоквиумам	Всего		
<p><b>Тема 1. Группы, поля, линейные пространства.</b></p> <p>Поля как линейные пространства над подполями. Алгебраические расширения. Связь с задачами о построении циркулем и линейкой.</p> <p>Линейная независимость автоморфизмов поля. Неподвижные поля и группы автоморфизмов. Теория Галуа. Концептуальный вывод основной теоремы алгебры.</p>	26	12	-	-	-		12	10	4	14

<p><b>Тема 2. Кольца, идеалы, базисы.</b>  Кольца многочленов. Идеалы и вычеты. Модули. Нетеровы кольца. Радикалы. Простые идеалы. Максимальные идеалы и поля. Алгебраическая зависимость и независимость. Степень трансцендентности. Целая алгебраическая зависимость. Дифференцирование в кольцах и полях. Теорема Гильберта о базисе. Базисы Гребнера. Критерий Бухбергера.</p>	26	12	-	-	-	-	12	10	4	14
<p><b>Тема 3. Системы полиномиальных уравнений.</b>  Множества нулей и аннуляторы. Понятие алгебраического многообразия. Условие совместности. Теорема Нетер о нормализации. Теорема Гильберта о нулях. Неприводимые многообразия. Координатные кольца и поля.</p>	32	12	-	2	-		14	12	8	20
<p><b>4. Промежуточная аттестация – устный экзамен</b></p>	22	2					22			
<p><b>Итого</b></p>	108	40					68			



## 8. Образовательные технологии.

Доска и мел. Информационные и интерактивные технологии используются при обсуждении проблемных и неоднозначных вопросов, требующих выработки решения в ситуации неопределенности.

## 9. Учебно-методические материалы для самостоятельной работы по дисциплине (модулю):

Самостоятельная работа учащихся состоит в изучении лекционного материала, учебно-методической литературы, подготовки к текущему контролю и промежуточной аттестации.

## 10. Ресурсное обеспечение:

- Перечень основной и вспомогательной учебной литературы ко всему курсу

### **Основная литература:**

- ✓ **Е.Е.Тыртышников, Основы алгебры, ФИЗМАТЛИТ, 2017.**

### **Дополнительная литература**

1. Е.Е.Тыртышников, Матричный анализ и линейная алгебра, ФИЗМАТЛИТ, 2007.
  2. Э.Б.Винберг, Курс алгебры, МЦНМО, 2011.
  3. Ван дер Варден Б.Л., Алгебра, "Наука", М., 1976.
  4. Мамфорд Д., Алгебраическая геометрия. Комплексные проективные многообразия, "Мир", М., 1979.
  5. Курош А.Г., Лекции по общей алгебре, "Наука", М., 1973.
  6. Ленг С., Алгебра, "Мир", М., 1968.
  7. Тыртышников Е.Е., Матричный анализ и линейная алгебра, Физматлит, М., 2007.
  8. Шафаревич И.Р., Основы алгебраической геометрии, МЦНМО, М., 2007.
  9. Зарисский О., Самюэль П., Коммутативная алгебра, том 1, ИЛ, М., 1963.
  10. Зарисский О., Самюэль П., Коммутативная алгебра, том 2, ИЛ, М., 1963.
  11. Кокс Д., Литтл Дж., О'Ши Д., Идеалы, многообразия и алгоритмы, "Мир", М., 2000.
  12. Курош А.Г., Курс высшей алгебры, "Наука", М., 1971.
  13. Мамфорд Д., Красная книга о многообразиях и схемах, МЦНМО, М., 2007.
  14. Постников М.М., Теория Галуа, Факториал Пресс, М., 2003.
  15. Рид М., Алгебраическая геометрия для всех, "Мир", М., 1991.
  16. Стрэнг Г., Линейная алгебра и ее приложения, "Мир", М., 1980.
  17. Халмош П., Конечномерные векторные пространства, Физматлит, М., 1963.
  18. Хованский А.Г., Теория Галуа, накрытия и римановы поверхности, МЦНМО, М., 2007.
  19. Хорн Р., Джонсон Ч., Матричный анализ, "Мир", М., 1989.
  20. Шафаревич И.Р., Основные понятия алгебры, РХД, Ижевск, 2001.
  21. Kendig K., Elementary Algebraic Geometry, Springer-Verlag, New York, 1977.
- Перечень используемых информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса, включая программное обеспечение, информационные справочные системы (при необходимости):

<http://elibrary.ru>

- Описание материально-технической базы.  
Занятия проводятся в аудитории, оснащенной доской

11. Язык преподавания – русский

12. Преподаватели:

*Степень, должность ФИО.*, e-mail, тел.: - акад, проф., д.ф.м.н, Тыртышников Евгений Евгеньевич, [eugene.tyrtysnikov@gmail.com](mailto:eugene.tyrtysnikov@gmail.com)

### **Фонды оценочных средств, необходимые для оценки результатов обучения**

Список вопросов для устного экзамена.

1. Определения группы, кольца, поля, линейного пространства, алгебры.
2. Алгебры с делением над полем комплексных чисел, теорема Фробениуса, кватернионы.
3. Алгебраическое расширение поля. Размерность расширения.
4. Вычисление размерности расширений поля, приложения к задачам оп построении циркулем и линейкой.
5. Поле разложения многочлена.
6. Описание конечных полей.
7. Линейная независимость автоморфизмов поля.
8. Неподвижные поля и группы автоморфизмов.
9. Группы Галуа и расширения полей, теория Галуа.
10. Идеалы и вычеты.
11. Идеалы и модули.
12. Радикалы и нильпотенты.
13. Простые и примарные идеалы.
14. Кольца частных, расширения и сужения идеалов.
15. Алгебраическая зависимость и независимость.
16. Целая алгебраическая зависимость.
17. Дифференцирование в кольцах и полях.
18. Теорема Гильберта о базисе.
19. Базисы Гребнера и критерий Бухбергера.
20. Множества нулей и аннуляторы. Топология Зарисского.
21. Условие совместности системы полиномиальных уравнений.
22. Теорема Нетер о нормализации.
23. Теорема Гильберта о нулях.
24. Неприводимые многообразия.
25. Координатные кольца и полиномиальные отображения.

**Материалы для мероприятий текущего контроля.**

Мероприятия текущего контроля реализуются в виде лекций дискуссий.

Примерные темы рефератов. Примеры тем:

1. Приложения алгебраических структур (полей, колец, идеалов)
2. Методы анализа полиномиальных уравнений
3. Приложения теории Галуа
4. Алгебраические многообразия.

### **Методические материалы для проведения процедур оценивания результатов обучения**

#### **Особенности организации процесса обучения**

Для эффективного освоения курса рекомендуется перед каждым занятием привести в порядок конспекты лекций. После каждого занятия рекомендуется найти и прочитать дополнительную литературу по теме лекции и прочитать свои конспекты.

#### **Система контроля и оценивания**

За работу во время лекций-дискуссий и за реферат выставляются оценки.

Окончательная оценка определяется в первую очередь на основании оценки устного ответа студента. При этом окончательная оценка корректируется в сторону повышения на основании оценок за реферат, а также оценок, полученный на лекциях-дискуссиях.

#### **Структура и график контрольных мероприятий**

Лекция дискуссия на 5-й, 8-й неделях, реферат в течение семестра, устный экзамен в конце семестра.