

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
**«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ
М.В.ЛОМОНОСОВА»**
ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ
УНИВЕРСИТЕТ МГУ-ППИ В ШЭНЬЧЖЭНЕ

УТВЕРЖДАЮ
Декан факультета ВМК МГУ,
Академик



/И.А. Соколов/
«14» сентября 2022 г.

ПРОГРАММА-МИНИМУМ

кандидатского экзамена по специальности

1.1.6 Вычислительная математика

Шифр и наименование области науки: 1.1. Физико-математические науки

Наименование отраслей науки,
по которым присуждаются ученые степени: Физико-математические науки

Уровень высшего образования:
Подготовка кадров высшей квалификации

Москва 2022

I. Описание программы:

Настоящая программа охватывает основополагающие разделы и области знания, в основе данной программы лежат следующие дисциплины:

Дисциплина, направленная на подготовку к сдаче экзамена кандидатского минимума по специальности 1.1.6. Вычислительная математика

II. Основные разделы и вопросы к экзамену:

1. Функциональный анализ

Метрические, нормированные, гильбертовы пространства.

Метрические пространства. Непрерывные отображения. Компактные множества.

Принцип сжатых отображений, методы последовательных приближений и их приложения. Линейные, нормированные, банаховы и гильбертовы пространства.

Сильная и слабая сходимость. Задача о наилучшем приближении. Наилучшее равномерное приближение. Минимальное свойство коэффициентов Фурье.

Линейные функционалы и операторы.

Непрерывные линейные операторы. Норма и спектральный радиус оператора.

Сходимость операторов; ряд Неймана и условия его сходимости. Теоремы о существовании обратного оператора. Мера обусловленности линейного оператора и ее применение при замене точного уравнения (решения) приближенным.

Линейные функционалы. Сопряженное пространство. Теорема Банаха-Штейнгауза и ее приложения. Теорема Рисса о представлении линейного ограниченного функционала (для гильбертова пространства). Спектр оператора. Сопряженные, симметричные, самосопряженные, положительно определенные, вполне непрерывные операторы и их спектральные свойства. Вариационные методы минимизации квадратичных функционалов, решения уравнений и нахождения собственных значений (методы Ритца, Бубнова-Галеркина, наименьших квадратов).

Дифференцирование нелинейных операторов, производные Фреше и Гато. Метод Ньютона, его сходимость и применение.

Пространства функций C , L_2 , L_p , W_p^l .

Обобщенная производная. Неравенства Пуанкаре-Стеклова-Фридрихса. Понятие о теоремах вложения.

2. Задачи математической физики

Математические модели физических задач.

Математические модели физических задач, приводящие к уравнениям математической физики. Основные уравнения математической физики; постановки задач. Корректно и некорректно поставленные задачи.

Обобщенное решение краевых задач для эллиптических уравнений.

Дивергентная форма записи эллиптического оператора. Понятие об обобщенном решении. Основные свойства гармонических функций (формулы Грина, теоремы о среднем, принцип максимума). Фундаментальное решение и функция Грина для уравнения Лапласа.

Задача Коши.

Задача Коши для уравнения теплопроводности и уравнения колебаний (в одномерном и многомерном случаях).

Фундаментальные решения. Характеристики.

Понятие об обобщенных решениях. Обобщенные решения смешанных задач для уравнений параболического и гиперболического типов; существование, единственность и

непрерывная зависимость от данных задачи. Теорема Стеклова о разложении в ряд Фурье по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля.

3. Численные методы

Численные методы алгебры.

Прямые и итерационные методы решения систем линейных уравнений с полными матрицами и матрицами специального вида. Одношаговые итерационные методы.

Чебышевские одношаговые итерационные методы. Оптимальный набор чебышевских параметров и вычислительная устойчивость. Трехчленные (двушаговые) чебышевские итерационные методы. Методы спуска и метод сопряженных градиентов.

Приближение функций.

Общие свойства систем ортогональных многочленов. Многочлены Лежандра и Чебышева; их свойства и приложения. Интерполяционные многочлены. Выбор узлов интерполяции.

Быстрое дискретное преобразование Фурье. Интерполяция нелокальными и локальными сплайнами.

Численное интегрирование.

Интерполяционные квадратурные формулы. Задача оптимизации квадратуры. Квадратурные формулы типа Гаусса. Многомерные квадратурные формулы. Понятие о методе Монте-Карло. Интегрирование сильно осциллирующих функций.

Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений.

Численные методы решения задачи Коши и краевых задач. Оценка погрешности, сходимость и устойчивость. Методы прогонки и стрельбы. Разностные схемы для решения дифференциальных уравнений с разрывными коэффициентами. Понятие о жестких системах обыкновенных дифференциальных уравнений и методах их решения.

Разностные и вариационно-разностные методы решения уравнений математической физики.

Основные понятия (аппроксимация, устойчивость, сходимость). Методы построения разностных схем (метод сеток, интегро-интерполяционный метод, метод аппроксимации интегральных тождеств, вариационно-разностные и проекционно-разностные методы, метод Галеркина, метод конечных элементов, метод аппроксимации квадратичного функционала); их применение к решению краевых и начально-краевых задач для эллиптических, параболических и гиперболических уравнений. Оценка порядка аппроксимации и сходимости. Двухслойные и трехслойные схемы; их устойчивость.

Экономичные методы решения нестационарных многомерных задач. Методы решения нелинейных уравнений (теплопроводности и газовой динамики). Дивергентные и монотонные разностные схемы. Схемная и искусственная вязкость.

Методы решения сеточных уравнений.

Прямые методы (прогонки, быстрого дискретного преобразования Фурье, циклической редукции). Метод последовательной верхней релаксации, неявные схемы с эквивалентными по спектру операторами, попеременно-треугольный метод. Методы расщепления и переменных направлений. Понятие о методе Федоренко. Оценки скорости сходимости.

Методы решения обратных и некорректных задач.

Применение методов регуляризации, минимизации сглаживающего функционала и итерационных методов для решения вырожденных, несовместных и плохо обусловленных систем линейных алгебраических уравнений и интегральных уравнений первого рода.

III. Критерии оценивания

Критерии и показатели оценивания ответа на экзамене			
неудовлетворительно (2)	удовлетворительно (3)	хорошо (4)	отлично (5)
Отсутствие знаний по вопросам предметной области «Вычислительная математика»	Фрагментарные знания по вопросам предметной области «Вычислительная математика»	Общие, но не структурированные знания по вопросам предметной области «Вычислительная математика»	Сформированные систематические знания по вопросам предметной области «Вычислительная математика»

IV. Рекомендуемая основная литература:

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. Изд.6-е. М.: МГУ, 1999.
2. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981.
3. Треногин В.А. Функциональный анализ. М.: Наука, 1980.
4. Лебедев В.И. Функциональный анализ и вычислительная математика. Изд.4-е. М.: Физматлит, 2000.
5. Воеводин В.В. Вычислительные основы линейной алгебры. М.: Наука, 1977.
6. Федоренко Р.П. Введение в вычислительную физику. М.: Наука,
7. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1982.
8. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. М.: Физматлит, 2001.
9. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1977.
10. Годунов С.К., Рябенький В.С. Разностные схемы. Изд.2-е. М.: Наука, 1977.
11. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978.
12. Денисов А.М. введение в теорию обратных задач. М.: МГУ, 1994.

V. Дополнительная литература:

1. Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1976.
2. Мысовских И.П. Интерполяционные кубатурные формулы. М.: Наука, 1981.

VI. Авторы программы:

Абакумов Михаил Владимирович	профессор	д. ф.-м. н.	vmabk@cs.msu.ru
Богомолов Сергей Владимирович	профессор	д. ф.-м. н.	bogomo@cs.msu.ru
Головизнин Василий Михайлович	профессор	д. ф.-м. н.	gol@ibrae.ac.ru
Еленин Георгий Георгиевич	профессор	д. ф.-м. н.	elenin2@rambler.ru
Мухин Сергей Иванович	заместитель заведующего кафедрой, профессор	д. ф.-м. н.	vmmus@cs.msu.ru
Хапаев Михаил Михайлович	доцент	к. ф.-м. н.	vmhap@cs.msu.ru