Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики

С.Н. Селезнева

Основы дискретной математики

Москва, 2010

УДК 510.52:519.712(075.8)
ББК 22.18.я73
С29

Печатается по решению Редакционно-издательского совета факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова

Р е ц е н з е н т ы:
Алексеев В.Б. – д.ф.-м.н., профессор
Марченков С.С. – д.ф.-м.н., профессор

Селезнева С.Н.
С 29 **Основы дискретной математики**: Учебное пособие. – М.: Издательский отдел факультета ВМК МГУ имени М.А. Ломоносова (лицензия ИД N 05899 от 24.09.2001 г.); МАКС Пресс, 2010. – 60 с.
ISBN 978-5-89407-416-0
ISBN 978-5-317-03239-5

Пособие поддерживает курс „Основы дискретной математики“, читающийся автором на факультете вычислительной математики и кибернетики МГУ имени М.В. Ломоносова для студентов по направлению „Информационные технологии“. Оно содержит задачи по темам: элементарная теория множеств, элементы комбинаторики, булев куб, возвратные последовательности. В него включены как элементарные, так и более сложные задачи. По каждой теме приведены необходимые определения и теоремы, разобраны примеры решения задач. Для студентов младших курсов вузов и школьников старших классов.

УДК 510.52:519.712(075.8)
ББК 22.18я73

ISBN 978-5-89407-416-0
ISBN 978-5-317-03239-5

Предисловие

В настоящем пособии собраны задачи, поддерживающие курс „Основы дискретной математики“, читающийся автором на факультете вычислительной математики и кибернетики МГУ имени М.В. Ломоносова для студентов по направлению „Информационные технологии“ (1-й курс). В него вошли задачи по темам: элементарная теория множеств, элементы комбинаторики, булев куб, возвратные последовательности. Основное внимание уделено понятиям, связанным с конечными множествами, и методам дискретной математики, применяющимся при решении задач.

Задачник содержит как элементарные, так и более сложные задачи. Также в него включены в виде задач некоторые известные теоремы. Такие задачи снабжены указаниями возможного хода рассуждений. По каждой теме приведены необходимые определения и теоремы, а также разобраны примеры решения задач. К задачам на определения и подсчет предложены ответы.

Пособие может быть полезно студентам младших курсов вузов и школьникам старших классов.

Автор надеется, что каждый читатель отыщет в этом задачнике что-то интересное для себя.

Автор благодарит доцента Романова Дмитрия Сергеевича и к.ф.-м.н. Дайняка Александра Борисовича за идеи некоторых задач. Также автор благодарит профессора Марченкова Сергея Серафимовича и к.ф.-м.н. Дайняка Александра Борисовича за ценные замечания по тексту пособия. Автор признательна своим близким за поддержку.

Селезнева Светлана Николаевна.
5 марта 2010 года.

1 Элементы теории множеств

1.1 Основные понятия

Множество – это совокупность объектов любой природы, рассматриваемых как одно целое (по Кантору[1]). При этом каждый такой объект является *элементом* этого множества. Или говорят, что он *принадлежит* этому множеству. Если какой-то объект не входит в рассматриваемую совокупность, то говорят, что он *не принадлежит* этому множеству, или что он *не является элементом* этого множества.

Обозначения:

$a \in A$ – a – элемент множества A;

$b \notin A$ – b не является элементом множества A.

Когда идет речь об объекте, который является элементом какого-то множества, часто употребляют синонимы к слову „принадлежит“. Говорят, что он *содержится* в множестве, или *входит* в множество, или *из* множества. В противном случае говорят, что объект *не содержится* в множестве, или *не входит* в множество, или *не из* множества.

Чтобы задать множество, достаточно перечислить все его элементы или каким-то образом их описать.

Примеры описаний множеств:

$A = \{1, 2, 3\}$ – множество A состит из элементов 1, 2 и 3. Это прямое перечисление элементов множества.

$A = \{x \mid x - \text{ четное число}\}$ – множество A состит из всех четных чисел. Это описание элементов множества при помощи некоторого свойства, которым все они и только они обладают.

Множество, не содержащее ни одного элемента, называется *пустым*. Пустое множество обозначается как $\emptyset$.

Данное выше определение множества неформально, множество определено интуитивно. Все дальнейшие понятия будут даны строго математически.

Определение 1.1. Множества A и B называют *равными*, если они состоят из одних и тех же элементов.

Обозначение:

$A = B$ – множества A и B равны.

[1] Георг Кантор (Cantor) – немецкий математик XIX-XX веков.

Определение 1.2. Множество A называют *подмножеством* множества B, если каждый элемент множества A является также и элементом множества B.

Обозначение:
$A \subseteq B$ – множество A является подмножеством множества B.
Для любого множества A верно, что $\emptyset \subseteq A$ и $A \subseteq A$.

Определение 1.3. Множество A называют *собственным подмножеством* множества B, если каждый элемент множества A является элементом множества B, но не каждый элемент множества B является элементом множества A.

Обозначение:
$A \subset B$ – множество A является собственным подмножеством множества B.
Другими словами, $A \subset B$, если $A \subseteq B$ и $A \neq B$.

Определение 1.4. *Объединением* множеств A и B называют множество, состоящее из всех тех элементов, которые содержатся или в множестве A, или в множестве B. Объединение множеств A и B обозначается как $A \cup B$.

Обозначение:
$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\}$ – объединение множеств A и B.

Определение 1.5. *Пересечением* множеств A и B называют множество, состоящее из всех тех элементов, которые содержатся одновременно и в множестве A, и в множестве B. Пересечение множеств A и B обозначается как $A \cap B$.

Обозначение:
$A \cap B = \{x \mid x \in A, x \in B\}$ – пересечение множеств A и B.

Определение 1.6. *Разностью* множеств A и B называют множество, состоящее из всех тех элементов множества A, которые не содержатся в множестве B. Разность множеств A и B обозначается как $A \setminus B$.

Обозначение:
$A \setminus B = \{x \mid x \in A, x \notin B\}$ – разность множеств A и B.

Определение 1.7. *Дополнением* к множеству A называют множество, состоящее из всех тех элементов, которые не содержатся в множестве A. При этом считается, что все возможные элементы принадлежат какому-то *универсальному* множеству U. Дополнение к множеству A обозначается как $\overline{A}$.

Обозначение:
$\overline{A} = \{x \mid x \in U, x \notin A\}$ – дополнение к множеству A.

Определение 1.8. *Прямым, или декартовым*[2] *произведением* множеств A и B называют множество, состоящее из всех возможных упорядоченных пар, первый элемент в которых из множества A, а второй элемент – из множества B. Произведение множеств A и B обозначается как $A \times B$.

Обозначение:
$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B\}$ – произведение множеств A и B.

Замечание 1.1. Операции объединения, пересечения, умножения множеств можно рассматривать для произвольного конечного числа множеств. Определения вводятся аналогично.

Определение 1.9. *n-й декартовой степенью* множества A (где $n \geq 2$ – натуральное число) называют множество, состоящее из всех возможных упорядоченных наборов из n элементов, каждый из которых принадлежит множеству A. n-я декартова степень множества A обозначается как A^n.

Обозначение:
$A^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_i \in A, i = 1, \ldots, n\}$ – n-я декартова степень множества A.

Определение 1.10. *Множеством всех подмножеств* множества A называют множество, состоящее из всех подмножеств множества A. Множество всех подмножеств множества A обозначается как $P(A)$ (или как 2^A).

Обозначение:
$P(A) = \{B \mid B \subseteq A\}$ – множество всех подмножеств множества A.
Для любого множества A верно, что $\emptyset \in P(A)$ и $A \in P(A)$.

[2] Рене Декарт (Descartes) – французский математик, философ, физик и физиолог XVI-XVII веков.

Определение 1.11. *Разбиением* множества A называют систему его непустых подмножеств A_1, $\ldots$, A_m, если они попарно не пересекаются и в объединении дают все множество A. В этом случае говорят, что множество A *разбито* на подмножества $A_1, \ldots, A_m$.

$A_1, \ldots, A_m$, где $A_i \neq \emptyset$, $i = 1, \ldots, m$, – разбиение множества A, если
1) $A_1 \cup \ldots \cup A_m = A$;
2) $A_i \cap A_j = \emptyset$ при $i \neq j$.

Пример 1.1. Выразить принадлежность произвольного элемента множеству D через его принадлежность или непринадлежность множествам A, B, C, если $D = \overline{A \cap B} \setminus \overline{C}$.

Решение. Рассмотрим произвольный элемент $x \in U$. Он может принадлежать или не принадлежать каждому из множеств A, B, C. Обозначим как 1 и 0 соответственно случаи его принадлежности или непринадлежности этим множествам. Все возможные варианты запишем в таблицу и построим соответствующие значения для множества D:

A	B	C	$A \cap B$	$\overline{A \cap B}$	$\overline{C}$	D
0	0	0	0	1	1	0
0	0	1	0	1	0	1
0	1	0	0	1	1	0
0	1	1	0	1	0	1
1	0	0	0	1	1	0
1	0	1	0	1	0	1
1	1	0	1	0	1	0
1	1	1	1	0	0	0

Из таблицы видно, что $x \in D$, если $x \notin A, B$, $x \in C$, или $x \notin A$, $x \in B, C$, или $x \in A, C$, $x \notin B$.

Ответ: произвольный элемент принадлежит множеству $D = \overline{A \cap B} \setminus \overline{C}$, если он принадлежит множеству C и не принадлежит хотя бы одному из множеств A и B.

Пример 1.2. Объяснить, почему свойство $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \setminus C)$ не верно для произвольных множеств A, B, C. Указать, при каких условиях на множества A, B, C оно выполняется.

Решение. Рассмотрим произвольный элемент $x \in U$. Он может принадлежать или не принадлежать каждому из множеств A, B, C. Обозначим как 1 и 0 соответственно случаи его принадлежности или непринадлежности этим множествам. Все возможные варианты запишем в таблицу и построим соответствующие значения для левой и правой частей свойства:

A	B	C	$A \setminus B$	$(A \setminus B) \setminus C$	$B \setminus C$	$A \setminus (B \setminus C)$
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	1	0
0	1	1	0	0	0	0
1	0	0	1	1	0	1
1	0	1	1	0	0	1
1	1	0	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	1

Из таблицы видно, что значения левой и правой частей отличаются на таких элементах x, что $x \in A, C$, $x \notin B$ или $x \in A, B, C$. Если таких элементов нет (если $A \cap C = \emptyset$), то свойство выполняется.

Ответ: свойство $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \setminus C)$ (ассоциативности разности) в общем случае не верно. Но оно будет выполняться для множеств A, B, C, если множества A и C не имеют общих элементов (если $A \cap C = \emptyset$).

1.2 Упражнения

Задача 1.1. Обосновать следующие свойства операций $\cup$, $\cap$:

1) идемпотентность: $A \cup A = A \cap A = A$;
2) коммутативность: $A \cup B = B \cup A$;
$A \cap B = B \cap A$;
3) ассоциативность: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$;
$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;
4) дистрибутивность: $(A \cup B) \cap C = (A \cap B) \cup (B \cap C)$;
$(A \cap B) \cup C = (A \cup B) \cap (B \cup C)$.

Задача 1.2. Обосновать следующие свойства операции $\overline{}$:

1) $\overline{\overline{A}} = A$;
2) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$;
3) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;
4) $A \cup \overline{A} = U$, $A \cap \overline{A} = \emptyset$.

Задача 1.3. Обосновать следующие свойства операции $\setminus$:

1) $A \setminus A = \emptyset$;	5) $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$;
2) $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$;	6) $U \setminus A = \overline{A}$;
3) $A \cup (B \setminus A) = A \cup B$;	7) $A \setminus \overline{B} = A \cap B$;
4) $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$;	8) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$.

Задача 1.4. Выразить принадлежность произвольного элемента множеству D через его принадлежность или непринадлежность множествам A, B, C:

1) $D = \overline{A \cap B} \cup C$;	5) $D = A \setminus \overline{B \cap C}$;
2) $D = \overline{A \cup B} \cap C$;	6) $D = A \setminus \overline{B \cup C}$;
3) $D = \overline{A \setminus B} \cup \overline{C}$;	7) $D = \overline{(A \cup B) \setminus \overline{C}}$;
4) $D = \overline{A \setminus B} \cap \overline{C}$;	8) $D = \overline{(A \cap B) \cup \overline{C}}$.

Задача 1.5. Объяснить, почему следующие свойства верны для произвольных множеств A, B, C:

1) $A \subseteq A \cup B$ и $B \subseteq A \cup B$;
2) $A \cap B \subseteq A$ и $A \cap B \subseteq B$;
3) $A \setminus B \subseteq A$ и $(A \setminus B) \cap B = \emptyset$;
4) если $A \subseteq B$, то $A \cup B = B$ и $A \cap B = A$;
5) если $A \subseteq B$, то $A \setminus B = \emptyset$;
6) если $A \subset B$, то $B \setminus A \neq \emptyset$ и $A \setminus B = \emptyset$;
7) если $A \subseteq B$ и $B \subseteq C$, то $A \subseteq C$;
8) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$.

Задача 1.6. Объяснить, почему следующие свойства не верны для произвольных множеств A, B, C. Найти правильное заключение свойства (в 1)-5)) или указать, при каких условиях на множества A, B, C свойство выполняется (в 6)-8)):

1) если $A \cup B = A$, то $B = \emptyset$;	5) если $A \setminus B = C$, то $A = B \cup C$;
2) если $A \cap B = A$, то $B = A$;	6) $A \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus (A \cup C)$;
3) если $A \setminus B = A$, то $B = \emptyset$;	7) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$;
4) если $A \setminus B = C$, то $A \setminus C = B$;	8) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

Задача 1.7. Пусть U – множество студентов некоторого вуза. Определим его подмножества: A – множество студентов, которые учатся на „отлично“, B — множество студентов, изучающих английский язык, C –

множество студентов, имеющих спортивный разряд, и D – множество студентов, состоящих в студенческом профкоме. Выразить формулами над множествами A, B, C, D следующие множества студентов:

1) множество отличников, у которых есть спортивный разряд;
2) множество студентов, не являющихся отличниками и не состоящих в профкоме;
3) множество студентов, не состоящих в профкоме, но изучающих английский язык;
4) множество отличников-спортсменов, состоящих в профкоме;
5) множество студентов, которые состоят в профкоме, и или являются отличниками, или изучают английский язык;
6) множество изучающих английский язык студентов, не являющихся ни отличниками, ни спортсменами;
7) множество студентов-спортсменов, которые или не учатся на „отлично“, или не состоят в профкоме;
8) множество изучающих английский язык отличников, состоящих в профкоме, но не спортсменов.

Задача 1.8. Обосновать следующие свойства операции $\times$:

1) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$;
2) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$;
3) $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$;
4) $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$.

Задача 1.9. 1. Привести пример множеств A и B, для которых $A \times B \neq B \times A$.

2. При каких условиях на множества A и B верно, что $(A \times B) \cap (B \times A) \neq \emptyset$?

3. Доказать, что если множества A и B непусты, то $A \times B = B \times A$ тогда и только тогда, когда $A = B$.

4. Пусть $\mathbb{N}$ обозначает множество натуральных чисел, $\mathbb{R}$ – множество действительных чисел, а $[a; b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ – отрезок действительных чисел от a до b ($a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$). Содержательно пояснить, какое множество определено как $A \times B$, если

1) $A = B = \mathbb{N}$;
2) $A = B = \mathbb{R}$;
3) $A = \{0\}$, $B = \mathbb{R}$;
4) $A = \mathbb{R}$, $B = [0; 1]$.

Задача 1.10. 1. Построить множество $A \times B$, если

1) $A = \emptyset$, $B = \{1\}$; 3) $A = B = \{0, 1\}$;
2) $A = B = \{1\}$; 4) $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b\}$.

2. Построить множество $P(A)$, если

1) $A = \emptyset$; 3) $A = \{0, 1\}$;
2) $A = \{1\}$; 4) $A = \{1, 2, a\}$.

Задача 1.11. Выяснить, является ли система множеств $A_1, \ldots, A_m$ разбиением множества A, если

1) $A_1 = \{0\}$, $A_2 = \{1, 3\}$, $A_3 = \{2\}$, $A = \{0, 1, 2, 3\}$;
2) $A_1 = \{0, 1\}$, $A_2 = \{1, 2\}$, $A_3 = \{2, 3\}$, $A = \{0, 1, 2, 3\}$;
3) $A_1 = \{0, 2\}$, $A_2 = \{1, 3\}$, $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$;
4) $A_1 = \{0, 1\}$, $A_2 = \{2, 3\}$, $A_3 = \{4, 5\}$, $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Объяснить, почему.

1.3 Конечные множества. Мощность множества

Определение 1.12. Множество A называют *конечным*, если оно состоит из конечного числа элементов. *Мощностью* конечного множества называют количество элементов в нем.

Обозначение:
$|A|$ – мощность множества A.

Определение 1.13. Конечные множества A и B называют *равномощными*, если их мощности равны, то есть если они состоят из одинакового числа элементов.

Обозначение:
$|A| = |B|$ – множества A и B – равномощные.

Определение 1.14. Если по какому-то правилу каждому элементу x множества A поставлен в соответствие ровно один элемент y из множества B, то задано *отображение* множества A в множество B.

Обозначение:
$f : A \to B$ – f – отображение множества A в множество B.

Если при отображении $f : A \to B$ элементу $x \in A$ поставлен в соответствие элемент $y \in B$, то пишут $y = f(x)$ и называют элемент y *образом* элемента x при отображении f. Элемент x при этом называют *прообразом* (одним из возможных) элемента y.

Множество образов всех элементов называется *образом* множества A при отображении f и обозначается $f(A)$. Множество A называется (*полным*) *прообразом* множества $C = f(A) \subseteq B$ при отображении f.

Обозначение:

$f(A) = \{y \in B \mid \exists^3\, x \in A : f(x) = y\}$ – образ множества A при отображении $f : A \to B$.

Замечание 1.2. Отображение $f : A \to B$ можно определить как подмножество декартова произведения $A \times B$ с определенным свойством.

Если подмножество $f \subseteq A \times B$ таково, что для каждого элемента x множества A ровно одна пара (x, y) принадлежит множеству f, то, значит, каждому элементу $x \in A$ поставлен в соответствие ровно один элемент $y \in B$ (второй элемент единственной пары (x, y) из f) и задано отображение f.

Замечание 1.3. Понятия „*отображение*“ и „*функция*“ – синонимы. Они несколько отличаются терминологией и областями применения. Если говорят о функции $f : A \to B$, то множество A называют *областью определения*, а множество $f(A) \subseteq B$ – *областью* (или *множеством*) *значений* функции f. Каждый элемент $x \in A$ называется *значением аргумента* (или *аргументом*), а элемент $y = f(x) \in B$ – *значением функции* при значении аргумента x.

Определение 1.15. Если при отображении $f : A \to B$ для каждого элемента y множества B найдется хотя бы один такой элемент x из множества A, что $y = f(x)$, то отображение f называется отображением множества A *на* множество B.

Определение 1.16. Отображение f множества A на множество B называется *взаимно-однозначным*, если для каждого элемента y множества B найдется ровно один такой элемент x из множества A, что $y = f(x)$.

[3] знак $\exists$ – квантор существования – читается „существует“, „хотя бы для одного“.

Взаимно-однозначное отображение множества A на множество B называется также *взаимно-однозначным соответствием* между множествами A и B.

Определение 1.17. Если $f : A \to B$ – взаимно-однозначное отображение, то для каждого элемента y множества B есть ровно один такой элемент x из множества A, что $y = f(x)$. Значит, определено отображение множества B на множество A, которое называется *обратным* к отображению f и обозначается f^{-1}.

Обозначение:
$f^{-1} : B \to A$ – f^{-1} – обратное отображение к взаимно-однозначному отображению $f : A \to B$.

Теорема 1.1. *Конечные множества A и B равномощны, если и только если существует взаимно-однозначное отображение множества A на множество B.*

Замечание 1.4. Для бесконечных множеств утверждение теоремы 1.1 рассматривается как определение их равномощности. То есть множества A и B (в том числе и бесконечные) называются *равномощными*, если существует взаимно-однозначное отображение множества A на множество B.

Теорема 1.2. *1. Если $|A| = k$ и $|B| = m$, то $|A \times B| = k \cdot m$.*
2. Если $|A| = k$ и $n \geq 2$, то $|A^n| = k^n$.
3. Если $|A| = k$, то $|P(A)| = 2^k$.

Пример 1.3. Пусть $A = \{0, 1\}$. Словом длины n в алфавите A назовем произвольный элемент множества A^n, $n \geq 2$. Найти количество слов длины n, начинающихся и оканчивающихся на 1.

Решение. Пусть $\alpha = (1, a_2, \ldots, a_{n-1}, 1) \in A^n$ – слово длины n. Каждый из элементов $a_2, \ldots, a_{n-1}$ может принимать независимо от других два значения: 0 и 1. Поэтому количество таких слов равно 2^{n-2}.

Ответ: 2^{n-2} слов.

Пример 1.4. Найти число решений уравнения

$$X \cup Y = C,$$

где X и Y – неизвестные множества, а C – заданное множество, $|C| = k$.

Решение. Заметим, что $X, Y \subseteq C$. Рассмотрим произвольный элемент $x \in C$. Он может принадлежать или не принадлежать каждому из множеств X и Y. Обозначим как 1 и 0 соответственно случаи его принадлежности и непринадлежности этим множествам. Запишем все возможные варианты в таблицу и построим соответствующие значения для его принадлежности множеству $X \cup Y$:

X	Y	$X \cup Y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Из таблицы видно, что если $x \notin X$, $x \notin Y$, то $x \notin X \cup Y$. В этом случае $X \cup Y \neq C$. Следовательно, в условиях задачи для каждого элемента $x \in C$ есть 3 возможности принадлежать или не принадлежать множествам X и Y: $x \notin X$, $x \in Y$, или $x \in X$, $x \notin Y$, или $x \in X, Y$.

Обозначим элементы множества C как $c_1, \ldots, c_k$. Введем множество $A = \{0, 1, 2\}$ и рассмотрим его k-ю декартову степень A^k. Сопоставим каждому элементу $(a_1, \ldots, a_k) \in A^k$ взаимно-однозначно решение (X, Y) исходного уравнения по следующему правилу:

если $a_i = 0$, то $c_i \notin X$, $c_i \in Y$;
если $a_i = 1$, то $c_i \in X$, $c_i \notin Y$;
если $a_i = 2$, то $c_i \in X$, $c_i \in Y$, $i = 1, \ldots, k$.

По изложенным выше рассуждениям каждому элементу множества A^k соответствует решение исходного уравнения (X, Y), и, наоборот, для каждого решения (X, Y) найдется соответствующий ему элемент множества A^k.

Найдено взаимно-однозначное соответствие между множеством A^k и множеством решений исходного уравнения. Следовательно, эти множества равномощны (по теореме 1.1). Откуда число решений исходного уравнения равно 3^k.

Ответ: 3^k решений.

1.4 Упражнения

Задача 1.12. Каким числом можно ограничить количество двухбуквенных существительных русского языка? (Омонимы не рассматриваются).

Задача 1.13. Номер проездного билета состоит из 4-х цифр. Сколько „счастливых“ билетов среди них? (Билет „счастливый“, если сумма двух первых цифр номера равна сумме двух последних его цифр).

Задача 1.14. В азбуке Морзе каждая буква или управляющий знак задается некоторой последовательностью символов из множества $A = \{\cdot,\ -\}$. Последовательности какой длины должны присутствовать в азбуке Морзе, чтобы иметь возможность по меньшей мере закодировать все буквы русского алфавита?

Задача 1.15. Пусть $A = \{0, 1\}$. Словом длины n в алфавите A назовем произвольный элемент множества A^n, $n \geq 1$. Подсчитать количество слов длины n,

1) у которых нет никаких особенностей (то есть общего вида);
2) не начинающихся с 1;
3) оканчивающихся на 00;
4) начинающихся на 0 и оканчивающихся на 1;
5) являющихся палиндромами (то есть с начала и с конца читающихся одинаково);
6) у которых четное число нулей;
7) у которых нечетное число единиц;
8) в которых встречаются и нули, и единицы.

Задача 1.16. Пусть X, Y – неизвестные множества, $X, Y \subseteq C$, где C – заданное множество, $|C| = k$. Найти число решений следующих уравнений:

1) $X \cap Y = \emptyset$;
2) $X \setminus Y = \emptyset$;
3) $X \cup Y = X \cap Y$;
4) $X \cap Y = X \setminus Y$.

Задача 1.17. Пусть X, Y, Z – неизвестные множества, $X, Y, Z \subseteq C$, где C – заданное множество, $|C| = k$. Найти число решений следующих уравнений:

1) $X \cup Y = C \setminus (X \cap Y)$;
2) $X \cup Y = C \setminus (X \setminus Y)$;
3) $(X \cap Y) \cup Z = X \cup Z$;
4) $(X \cap Y) \setminus Z = X \setminus Z$;
5) $(X \cup Y) \setminus Z = X \cup Y$;
6) $(X \cap Y) \setminus Z = Y \cap Z$;
7) $(X \cup Y) \cap Z = X \cup (Y \cap Z)$;
8) $(X \cup Y) \setminus Z = (X \cap Y) \setminus Z$.

Задача 1.18. Пусть X, Y – неизвестные множества, а C, D – заданные множества, $C \subseteq D$, $|C| = k$, $|D| = m$, $k \leq m$. Найти число решений следующих систем:

$$1) \begin{cases} X \cap Y = C \\ X, Y \subseteq D \end{cases}; \qquad 2) \begin{cases} X \setminus Y = C \\ X, Y \subseteq D \end{cases}.$$

Задача 1.19. 1. Существуют ли конечные множества A и B, для которых верны следующие свойства? Если существуют, привести пример таких множеств A и B, если не существуют, объяснить почему:

1) $|(A \times B) \cup (B \times A)| = k$, $k = 0, 1, 2, 3$;
2) $|(A \times B) \cap (B \times A)| = k$, $k = 0, 1, 2, 3$;
3) $|(A \times B) \setminus (B \times A)| = k$, $k = 0, 1, 2, 3$;
4) $|((A \times B) \setminus (B \times A)) \cup ((B \times A) \setminus (A \times B))| = k$, $k = 0, 1, 2, 3$.

2. Выяснить для случаев 1)-4) п. 1, какие значения может принимать число k, если A и B – некоторые конечные множества. Для каждого из возможных его значений привести пример множеств A и B, когда оно достигается.

Задача 1.20. 1. Доказать, что для произвольных конечных множеств A и B верно равенство

$$|(A \times B) \setminus (B \times A)| = |(B \times A) \setminus (A \times B)|.$$

2. Доказать, что число $|((A \times B) \setminus (B \times A)) \cup ((B \times A) \setminus (A \times B))|$ – четно для произвольных конечных множеств A и B.

Задача 1.21. Натуральные числа k и m называются *взаимно простыми*, если их наибольший общий делитель равен 1. Для каждого натурального числа n обозначим как $\varphi(n)$ количество натуральных чисел, не превосходящих n и взаимно простых с ним. Функция $\varphi(n)$ называется *функцией Эйлера*[4].

Пусть $n = p_1^{m_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{m_k}$, где $p_1, \ldots, p_k$ – попарно различные простые числа (см. задачу 1.26, п. 6), $m_1, \ldots, m_k \geq 1$, – каноническое разложение числа n на простые сомножители.

В предположении, что известно каноническое разложение числа n на простые сомножители, найти формулу для значений функции $\varphi(n)$.

[4]Леонард Эйлер (Euler) – математик, механик, физик и астроном XVIII века, по происхождению швейцарец.

1.5 Формула включений-исключений

Теорема 1.3. *Пусть* $A_1, \ldots, A_n$ *– конечные множества,* $n \geq 2$. *Тогда*

$$|A_1 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{k=1}^{n} \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} (-1)^{k-1} |A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}|.$$

Формула в теореме 1.3 называется *формулой включений-исключений.*

Пример 1.5. Подсчитать количество трехзначных чисел, в записи которых есть хотя бы одна цифра 7.

Решение. Пусть множество A_1 содержит все числа вида $7bc$, множество A_2 содержит все числа вида $a7c$ и множество A_3 содержит все числа вида $ab7$, где $a \in \{1, 2, \ldots, 9\}$, $b, c \in \{0, 1, \ldots, 9\}$.

Если в записи трехзначного числа есть хотя бы одна цифра 7, то это число принадлежит объединению множеств A_1, A_2 и A_3. По формуле включений-исключений

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|.$$

Находим

$|A_1| = 100$, $|A_2| = |A_3| = 90$,
$|A_1 \cap A_2| = |A_1 \cap A_3| = 10$, $|A_2 \cap A_3| = 9$,
$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 1$.

Откуда $|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = 100 + 90 + 90 - 10 - 10 - 9 + 1 = 252$.
Ответ: 252 числа.

1.6 Упражнения

Задача 1.22. 1. Доказать, что для любых конечных множеств A и B верно:

1) $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$;
2) $|A \setminus B| = |A| - |A \cap B|$.

2. Применив один шаг индукции, опираясь на п. 1, доказать, что для любых конечных множеств A, B и C верно:

1) $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$;
2) $|A \setminus (B \cup C)| = |A| - |A \cap B| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|$.

Задача 1.23. В июле было 20 солнечных и 15 дождливых дней. Доказать, что по меньшей мере 4 дня июля были и солнечными, и дождливыми.

Задача 1.24. Номерной знак автомобиля состоит из трех цифр. Сколько номеров автомобилей, в которых две одинаковые цифры стоят подряд? (Например, 773, 122).

Задача 1.25. Пусть $A = \{0, 1\}$. Словом длины n в алфавите A назовем произвольный элемент множества A^n, $n \geq 1$. Определим подмножества множества A^n: B – множество слов с нечетным количеством единиц, C – множество слов, начинающихся с 0, и D – множество слов, оканчивающихся на 11. Найти мощности следующих множеств:

1) $B \cup C$;	5) $B \cap (C \cup D)$;
2) $B \setminus D$;	6) $B \setminus (C \cup D)$;
3) $B \cup C \cup D$;	7) $C \setminus (B \cap D)$;
4) $B \cup (C \cap D)$;	8) $D \setminus (B \setminus C)$.

Задача 1.26. 1. Доказать, что количество натуральных чисел, делящихся на число p и не превосходящих числа n, равно $\lfloor \frac{n}{p} \rfloor$.[5]

2. Найти количество натуральных чисел, меньших 100, которые делятся или на 3, или на 5.

3. Найти количество натуральных чисел, не больших 1000, которые делятся или на 10, или на 15, или на 24.

4. Найти количество натуральных чисел, меньших 100, которые не делятся ни на 7, ни на 11.

5. Найти количество натуральных чисел, не больших 1000, которые не делятся ни на 15, ни на 20, ни на 36.

6. Натуральное число называется *простым*, если оно имеет только два делителя: 1 и самого себя. Натуральное число, не являющееся простым, называется *составным.* По определению число 1 не является ни простым, ни составным. Найти количество простых чисел, меньших 100.

7. По формуле включений-исключений, опираясь на п. 1, вывести формулу для подсчета количества натуральных чисел, делящихся хотя бы на одно из простых чисел $p_1, \ldots, p_k$ и не превосходящих числа n.

[5]выражение $\lfloor x \rfloor$ обозначает максимальное целое число, не превосходящее число x

8. Пусть $p_1, \ldots, p_k$ – все простые числа, не большие числа $\sqrt{n}$. По формуле включений-исключений, опираясь на п. 1, вывести формулу для подсчета количества простых чисел, не превосходящих числа n.

Задача 1.27. Каждый из студентов группы изучает хотя бы один иностранный язык. Известно, что английский изучают 15 человек, французский – 10 человек, немецкий – 3 человека, английский и французский – 5 человек, английский и немецкий – 2 человека, французский и немецкий – 1 человек. При этом никто не изучает все три языка. Найти численность группы.

Задача 1.28. При исследовании читательских интересов студентов оказалось, что 60 % студентов читают журнал A, 50 % – журнал B, 50 % – журнал C, 30 % – журналы A и B, 50 % – журналы A и C, 20 % – журналы B и C, 20 % – журналы A, B и C. Сколько процентов студентов

1) не читают ни одного из журналов;
2) читают хотя бы один журнал;
3) читают не менее двух журналов;
4) читают ровно два журнала.

Задача 1.29. *Симметрической разностью* множеств A и B называется множество

$$A \triangle B = \{x \mid x \in A, x \notin B \text{ или } x \notin A, x \in B\}.$$

1. Обосновать следующие свойства операции $\triangle$:

1) коммутативность: $A \triangle B = B \triangle A$;
2) ассоциативность: $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$.

2. Доказать, что множество $A_1 \triangle \ldots \triangle A_n$ не зависит от расстановки скобок, и произвольный элемент x принадлежит этому множеству, если и только если он содержится в нечетном числе множеств $A_1, \ldots, A_n$.

3. Доказать, что для любых конечных множеств A и B верно:

$$|A \triangle B| = |A| + |B| - 2 \cdot |A \cap B|.$$

4. Доказать по индукции, опираясь на п. 3, что если множества A_1, $\ldots$, A_n – конечны, то

$$|A_1 \triangle \ldots \triangle A_n| = \sum_{k=1}^{n} \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n} (-1)^{k-1} \cdot 2^{k-1} \cdot |A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}|.$$

1.7 Принцип Дирихле

Принцип Дирихле[6] состоит в следующем: если есть n мест, то, как бы мы не размещали $(n+1)$ объект по этим n местам, всегда найдется хотя бы одно место, где будет не менее двух объектов.

Как правило, принцип Дирихле формулируется так:

Принцип Дирихле: „Если есть n клеток и $(n+1)$ кролик, то, как бы мы не размещали кроликов по клеткам, всегда найдется клетка, в которой будет не менее двух кроликов“.

Пример 1.6. В сентябре 21 день был солнечным. Доказать, что

1) в сентябре два дня подряд была солнечная погода;

2) хотя бы однажды три подряд идущих дня сентября были солнечными.

Решение. 1. Выпишем в линейку числа с единицы до тридцати, означающие дни сентября. Пасмурные дни, которых было $30 - 21 = 9$, заштрихуем. Они разбивают все дни сентября на промежутки из солнечных дней. Всего пасмурных дней 9, они могут разбить все дни не более, чем на 10, промежутков. Даже при 11 солнечных днях по принципу Дирихле хотя бы один промежуток состоял бы хотя бы из двух дней.

2. Продолжим рассуждения. Пусть каждый из промежутков состоит не более, чем из двух дней. Тогда заметим, что промежутков не более 10, в каждом - не более двух дней, значит всего - не более 20 солнечных дней. А по условию в сентябре был 21 солнечный день. Полученное противоречие убеждает нас, что хотя бы в одном промежутке должно быть не менее трех дней.

1.8 Упражнения

Задача 1.30. 1. В коробке лежат 2 пары одинаковых ботинок. Какое наименьшее число ботинок нужно вынуть не глядя, чтобы среди них обязательно оказалась одна пара?

2. В корзине лежат 2 пары одинаковых носков. Какое наименьшее число носков нужно вынуть не глядя, чтобы среди них обязательно оказалась одна пара?

---

[6]Петер Густав Лежён Дирихле (Dirichlet) – немецкий математик XIX века.

3. В коробке лежат 3 пары разных ботинок. Какое наименьшее число ботинок нужно вынуть не глядя, чтобы среди них обязательно оказалась одна пара?

4. В корзине лежат 4 пары разных носков. Какое наименьшее число носков нужно вынуть не глядя, чтобы среди них обязательно оказалась одна пара?

Задача 1.31. В коробке лежат 10 конфет в красных обертках, 10 в синих и 10 в желтых обертках. Какое наименьшее число конфет нужно вынуть не глядя, чтобы среди них обязательно оказались две конфеты в обертках

1) одного цвета;
3) красного цвета;
2) разных цветов;
4) не синего цвета?

Задача 1.32. 1. В шахматной партии одним конем ходили 9 раз. Доказать, что конь побывал хотя бы дважды и на какой-то горизонтали, и на какой-то вертикали шахматной доски.

2. В шахматной партии одним конем ходили 8 раз. Мог ли конь побывать хотя бы раз на каждой горизонтали и на каждой вертикали шахматной доски?

Задача 1.33. В трех группах учатся 60 студентов. Доказать, что хотя бы два из них празднуют свой день рождения в одну и ту же неделю.

Задача 1.34. В университетской сборной по футболу 60 студентов, являющихся полевыми игроками. За год сборная сыграла 40 матчей, причем в каждом матче участвовало ровно 10 игроков. Доказать, что какие-то два студента играли вместе по меньшей мере дважды.

Задача 1.35. Доказать, что в любой группе из n человек, где $n \geq 2$, всегда найдутся хотя бы два человека, знакомые с одинаковым количеством присутствующих.

Задача 1.36. 1. Пусть даны два числа, сумма которых равна 100. Доказать, что одно из этих чисел не меньше 50 и другое из этих чисел не больше 50.

2. Пусть даны числа $a_1, \ldots, a_n$, сумма которых равна M. Доказать, что хотя бы одно из этих чисел не меньше $\frac{1}{n} \cdot M$ и хотя бы одно из этих чисел не больше $\frac{1}{n} \cdot M$.

Задача 1.37. Моток ниток проткнули 200 спицами в форме прямого цилиндра с диаметром основания 1 мм. После этого он приобрел форму шара. Может ли диаметр этого шара быть равным 1 см?

Задача 1.38. Цветочный город имеет форму квадрата, который разбит на 25 одинаковых квадратных участков параллельными линиями, делящими каждую его сторону на 5 частей. Известно, что каждый житель Цветочного города враждует не более, чем с тремя другими. Можно ли так расселить 25 жителей Цветочного города по этим участкам, чтобы никакие два врага не были соседями? Два квадратных участка считаются соседними, если у них общая сторона.

2 Элементы комбинаторики

2.1 Комбинаторные объекты

Пусть $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ – множество из n элементов.

Из этого множества можно выбирать элементы, которые будут образовывать подмножества с определенными свойствами. В зависимости от свойств подмножеств получатся различные *комбинаторные объекты*. С каждым комбинаторным объектом связано *комбинаторное число* – количество комбинаторных объектов этого вида, которые можно выбрать из исходного множества.

Рассмотрим некоторые комбинаторные объекты и связанные с ними комбинаторные числа.

Определение 2.1. *Размещением* из n элементов по k называется упорядоченный набор k элементов из этих n элементов.

Число размещений из n по k обозначается как A_n^k.

Теорема 2.1. *Число размещений из n из k равно $A_n^k = (n)_k = n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$.*

Число $(n)_k$ называется *убывающим факториалом* для чисел n и k.

Для числа размещений верны следующие свойства:

$A_n^k = n(n-1)\ldots(n-k+1)$ при $n \geq k \geq 1$;

$A_n^0 = 1$;

$A_n^k = 0$ при $n < k$;

$A_n^k = n \cdot A_{n-1}^{k-1}$.

Определение 2.2. *Перестановкой* n элементов называется упорядоченный набор всех этих элементов.

Перестановка является частным случаем размещения при $k = n$.

Число перестановок n элементов обозначается как P_n.

Теорема 2.2. *Число перестановок n элементов равно $P_n = A_n^n = n! = n(n-1) \cdot \ldots \cdot 1$.*

Число $n!$ называется *факториалом* числа n.

Факториал является частным случаем убывающего факториала при $k = n$: $n! = (n)_n$.

Для числа перестановок верны следующие свойства:
$P_n = n(n-1)\dots 1$ при $n \geq 1$;
$P_0 = 1$;
$P_n = n \cdot P_{n-1}$.

Определение 2.3. *Размещением с повторениями* из n элементов по k называется упорядоченный набор k элементов с возможными повторениями из этих n элементов.

Число размещений с повторениями из n по k обозначается как $\bar{A}_n^k$.

Теорема 2.3. *Число размещений с повторениями из n по k равно $\bar{A}_n^k = n^k$.*

Определение 2.4. *Сочетанием* из n элементов по k называется неупорядоченный набор k элементов из этих n элементов.

Число сочетаний из n по k обозначается как C_n^k.

Теорема 2.4. *Число сочетаний из n по k равно $C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{(n)_k}{k!}$.*

Для числа сочетаний верны следующие свойства:
$C_n^k = \frac{(n)_k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ при $n \geq k \geq 1$;
$C_n^0 = 1$;
$C_n^k = 0$ при $n < k$;
$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$.

Теорема 2.5. $(x+y)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k x^{n-k} y^k$.

Следствие 2.5.1. $\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$.

Следствие 2.5.2. $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k = 0$.

Формула в теореме 2.5 называется *формулой бинома Ньютона*[7]. Поэтому числа $\binom{n}{k}$ называются *биномиальными коэффициентами.*

Определение 2.5. *Сочетанием с повторениями* из n элементов по k называется неупорядоченный набор k элементов с возможными повторениями из этих n элементов.

[7] Исаак Ньютон (Newton) – английский математик, механик, астроном и физик XVII-XVIII веков.

Число сочетаний с повторениями из n по k обозначается как $\bar{C}_n^k$.

Теорема 2.6. *Число сочетаний с повторениями из n из k равно* $\bar{C}_n^k = C_{n+k-1}^k$.

Пример 2.1. В шахматном турнире играют 10 человек. Сколько различных вариантов распределения трех призовых мест между участниками?

Решение. Есть три призовых места, которые не равнозначны. На них претендуют 10 участников. Поэтому число различных распределений призовых мест равно числу размещений из 10 по 3: $A_{10}^3 = (10)_3 = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$ вариантов.

Ответ: 720 вариантов.

Пример 2.2. В городском первенстве по хоккею участвуют 10 команд. Команды, занявшие три первых места, получают путевки на чемпионат страны. Сколько различных вариантов команд города на чемпионате страны?

Решение. Есть три призовых места, которые равнозначны. На них претендуют 10 команд. Поэтому число различных троек победителей равно числу сочетаний из 10 по 3: $C_{10}^3 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3!} = 120$ вариантов.

Ответ: 120 вариантов.

2.2 Упражнения

Задача 2.1. Найти все возможные

1) размещения по 2 из 4-х элементов множества $A = \{1, 2, 3, 4\}$;
2) перестановки 3-х элементов множества $A = \{1, 2, 3\}$;
3) сочетания по 3 из 5-ти элементов множества $A = \{a, b, c, d, e\}$;
4) сочетания с повторениями по 2 из 4-х элементов множества $A = \{a, b, c, d\}$.

Задача 2.2. На плоскости расположены 35 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Сколько треугольников с вершинами в этих точках можно построить?

Задача 2.3. Города A, B, C, D и E попарно соединены дорогами. Сколько разных маршрутов путешествия из города A в город E с посещением еще каких-то двух городов можно составить? Предполагается, что в маршруте каждый город присутствует не более одного раза, и маршруты, отличающиеся порядком следования городов, различны.

Задача 2.4. Сколькими способами можно распределить среди 20 студентов группы четыре билета в театр, если

1) билеты на один спектакль, и каждый студент может получить не более одного билета;
2) билеты на один спектакль, и каждый студент может получить сколько угодно билетов;
3) все билеты на разные спектакли, и каждый студент может получить не более одного билета;
4) все билеты на разные спектакли, и каждый студент может получить сколько угодно билетов?

Билеты на одно мероприятие считаются равнозначными.

Задача 2.5. Есть 4 билета на концерт, 5 билетов в театр и 7 билетов в цирк. Сколькими способами их можно распределить среди 25 студентов группы, если каждый студент может получить не более одного билета на каждое мероприятие? Билеты на одно мероприятие считаются равнозначными.

Задача 2.6. 1. Девочка нанизала n разных бусин на английскую булавку. Сколько различных украшений может получиться таким образом? Два украшения различны, если они отличаются порядком следования бусин на булавке.

2. Девочка собрала n бусин разного цвета и составила из них ожерелье. Сколько различных ожерелий может получиться таким образом? Два ожерелья различны, если они отличаются порядком следования бусин.

Задача 2.7. У англичан принято давать детям несколько имен. Сколькими способами можно можно назвать ребенка, если ему дадут не более трех имен из 300 возможных, и при этом

1) имена могут повторяться;
2) все имена различны?

Задача 2.8. Гости рассаживаются за круглым столом. Два рассаживания считаются одинаковыми, если при них у каждого гостя одни и те же соседи.

1) Сколькими разными способами можно так рассадить за столом n ($n \geq 2$) человек?

2) Сколькими разными способами можно так рассадить n мужчин и n женщин ($n \geq 1$), чтобы еще любые два соседа оказались разного пола?

Задача 2.9. Пусть $A_1, \ldots, A_n$ – конечные множества. Обозначим количество элементов, принадлежащих в точности m множествам из множеств A_1, …, A_n, как $N(n,m)$, $m \geq 1$.

1. Доказать, что

1) $N(2,1) = |A_1| + |A_2| - 2 \cdot |A_1 \cap A_2|$; 2) $N(2,2) = |A_1 \cap A_2|$.

2. Доказать индукцией по n, опираясь на п. 1, что если $1 \leq m \leq n$, то

$$N(n,m) = \sum_{k=0}^{n-m} \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_{m+k} \leq n} (-1)^k \cdot C_{m+k}^m \cdot |A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_{m+k}}|.$$

Задача 2.10. 1. Доказать формулу включений-исключений (теорема 1.3), подсчитав сколько раз произвольный элемент входит в левую и правую части ее выражения.

2. Доказать формулу из п. 2 задачи 2.9, подсчитав сколько раз произвольный элемент входит в левую и правую части ее выражения.

Задача 2.11. 1. Перестановка n элементов называется *беспорядком*, если в ней элемент i находится не на i-том (то есть не на „своем“) месте для всех $i = 1, \ldots, n$. По формуле включений-исключений (теорема 1.3) вывести формулу для подсчета количества беспорядков из n элементов.

2. По формуле п. 2 задачи 2.9 вывести формулу для подсчета количества перестановок n элементов, в которых ровно m, $0 \leq m \leq n$, элементов находятся на „своих“ местах.

Задача 2.12. Пять гостей рассаживаются за столом, не обращая внимания на таблички с именами. Найти вероятность того, что хотя бы один из гостей окажется на месте с табличкой со своим именем.

Задача 2.13. Четыре человека сдают свои шляпы в гардероб. В предположении, что шляпы возвращаются наугад, найти вероятность того, что ровно k, $0 \leq k \leq 4$, человек получат свои шляпы обратно.

Задача 2.14. Рассмотрим следующую игру. Выбирается некоторое слово. Затем из его букв составляются новые слова, в которых каждая буква может встречаться не более раз, чем в выбранном слове. Например, из слова „*комбинаторика*“ можно составить слова „*канат*“, „*карат*“, „*банка*“, но не получится слово „*банан*“ (буква „*н*“ в выбранном слове встречается только один раз).

1. Сколько разных слов из k букв можно так составить из выбранного слова из n букв ($1 \leq k \leq n$)?

2. Сколько разных слов можно так составить из выбранного слова из n букв?

Задача 2.15. Сколько разных одночленов получится, если раскрыть скобки и привести подобные слагаемые в выражении $(x+y)^n$, где $n \geq 2$?

Задача 2.16. 1. Сколько разных одночленов получится, если раскрыть скобки и привести подобные слагаемые в выражении $(x_1 + \ldots + x_k)^n$, где $k \geq 2$, $n \geq 2$?

2. Найти количество разных одночленов, которые получатся, если раскрыть скобки и привести подобные слагаемые в следующих выражениях:

1) $(x+y+z)^2$; 3) $(x+y+z+u)^2$;
2) $(x+y+z)^3$; 4) $(x+y+z+u)^5$?

2.3 Свойства комбинаторных чисел

Пример 2.3. Доказать, что $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$.

Решение. Сочетание из n элементов по k может

1) или не содержать n-й элемент – таких сочетаний ровно C_{n-1}^k;

2) или содержать n-й элемент – таких сочетаний ровно C_{n-1}^{k-1}.

Этими вариантами исчерпываются все возможные сочетания из n элементов по k, и эти варианты одновременно не возможны. Поэтому $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$.

Пример 2.4. Доказать, что $\sum\limits_{k=0}^{n} k \cdot C_n^k = n \cdot 2^{n-1}$.

Решение. Заметим, что при $k \geq 1$ верно

$$k \cdot C_n^k = k \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} =$$

$$= n \cdot \frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} = n \cdot C_{n-1}^{k-1}.$$

Слагаемое при $k=0$ обнуляется. Поэтому, учитывая следствие к теореме 2.5, получаем

$$\sum_{k=0}^{n} k \cdot C_n^k = \sum_{k=1}^{n} k \cdot C_n^k = \sum_{k=1}^{n} n \cdot C_{n-1}^{k-1} = n \cdot \sum_{l=0}^{n-1} C_{n-1}^l = n \cdot 2^{n-1}.$$

2.4 Упражнения

Задача 2.17. 1. Доказать, что при $n \geq 1$ и $0 \leq l \leq k \leq n$

1) $C_n^k = C_n^{n-k}$; 2) $C_n^k \cdot C_k^l = C_{n-l}^{k-l} \cdot C_n^l$.

Задача 2.18. 1. Доказать, что $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$.

2. Доказать по индукции, опираясь на п. 1, что

1) $C_n^k = \sum\limits_{l=0}^{n} C_{n-l-1}^{k-l}$; 2) $C_{n+1}^{k+1} = \sum\limits_{l=k}^{n} C_l^k$.

Задача 2.19. 1. Доказать, что $C_{n+1}^k > C_n^k$ (то есть последовательность $\{C_n^k\}$ возрастает по n при фиксированном k).

2. Доказать, что $C_{n-(l+1)}^{k-(l+1)} < C_{n-l}^{k-l}$ (то есть последовательность $\{C_{n-l}^{k-l}\}$ убывает по l при фиксированных n и k).

3. Доказать, что $C_n^{k+1} > C_n^k$ при $k < \frac{n-1}{2}$ и $C_n^{k+1} < C_n^k$ при $k > \frac{n-1}{2}$ (то есть последовательность $\{C_n^k\}$ возрастает по k при $k < \frac{n-1}{2}$ и убывает по k при $k > \frac{n-1}{2}$ при фиксированном n).

4. Доказать, что

1) если n – нечетно, то максимальное значение числа C_n^k при фиксированном n достигается при $k = \frac{n-1}{2}$ и $k = \frac{n+1}{2}$;

2) если n – четно, то максимальное значение числа C_n^k при фиксированном n достигается при $k = \frac{n}{2}$.

Задача 2.20. Доказать, что если p – простое число (см. задачу 1.26, п. 6), то C_p^k делится на p при всех $k = 1, \ldots, (p-1)$.

Задача 2.21. Доказать, опираясь на формулу бинома Ньютона (см. теорему 2.5), что при $n \geq 1$

1) $\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$;

2) $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot C_n^k = 0$;

3) $\sum\limits_{k=0}^{n} k \cdot C_n^k = n \cdot 2^{n-1}$;

4) $\sum\limits_{k=0}^{n} k(k-1) C_n^k = n(n-1)2^{n-2}$;

5) $\sum\limits_{k=0}^{n} (2k+1) \cdot C_n^k = (n+1) \cdot 2^n$;

6) $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \cdot C_n^k = \frac{1}{n+1} \cdot (2^{n+1} - 1)$;

7) $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} \cdot C_n^k = \frac{1}{n+1}$;

8) $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \cdot C_n^k = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$.

Задача 2.22. 1. Доказать, что при $n \geq 1$ и $k \geq 0$

$$\sum_k C_n^{2k} = \sum_k C_n^{2k+1} = \frac{1}{2} \cdot 2^n.$$

2. Доказать, что $n \geq 1$ и $k \geq 0$

$$\sum_k C_n^{3k} = \frac{1}{3} \cdot \left(2^n + 2\cos\frac{\pi n}{3}\right).$$

Задача 2.23. 1. Доказать, перейдя к сумме бесконечно убывающей геометрической прогрессии, что если $n \geq 1$ и $r < \frac{n}{2}$, то

$$\sum_{k=0}^{r} C_n^k \leq \frac{n-r}{n-2r} \cdot C_n^r.$$

2. Доказать, перейдя к сумме бесконечно убывающей геометрической прогрессии, что если $n \geq 1$ и $r > \frac{n}{2}$, то

$$\sum_{k=r}^{n} C_n^k \leq \frac{r}{2r-n} \cdot C_n^r.$$

Задача 2.24. Доказать индукцией по n, опираясь на свойство возрастания последовательности $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, что

$$C_n^k \leq \frac{n^n}{k^k \cdot (n-k)^{n-k}}$$

при всех $n \geq 1$, $0 \leq k \leq n$ (полагаем, что $0^0 = 1$).

Задача 2.25. Доказать, что если $n \geq 1$ и $r < \frac{n}{2}$, то

$$\sum_{k=0}^{r} C_n^k \leq \frac{n^n}{r^r \cdot (n-r)^{n-r}}.$$

Задача 2.26. Если целые неотрицательные числа $k_1, \ldots, k_m$ таковы, что $k_1 + \ldots + k_m = n$, то число $C_n(k_1, \ldots, k_m) = \frac{n!}{k_1! \cdot \ldots \cdot k_m!}$ называется *полиномиальным коэффициентом.*

1. Исходя из комбинаторного смысла доказать, что

$$C_n(k_1, \ldots, k_m) = C_n^{k_1} \cdot C_{n-k_1}^{k_2} \cdot \ldots \cdot C_{n-k_1-\ldots-k_{m-1}}^{k_m}.$$

2. Доказать, что биномиальный коэффициент C_n^k является частным случаем полиномиального коэффициента $C_n(k_1, k_2)$ при $k_2 = n - k_1$.

3. Индукцией по m доказать, что

$$(x_1 + \ldots + x_m)^n = \sum_{\substack{k_1, \ldots, k_m \geq 0 : \\ k_1 + \ldots + k_m = n}} C_n(k_1, \ldots, k_m) \cdot x_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot x_m^{k_m}.$$

4. Доказать, опираясь на п. 3, что

$$\sum_{\substack{k_1, \ldots, k_m \geq 0 : \\ k_1 + \ldots + k_m = n}} C_n(k_1, \ldots, k_m) = k^n.$$

3 Отношения на множествах

3.1 Основные понятия

Определение 3.1. Пусть $h \geq 1$. *h-арным* (или *h-местным*) *отношением на множестве* A назовем любое подмножество множества A^h.

Обозначение:

$R^{(h)} \subseteq A^h$ – R – h-арное отношение на множестве A.

Если $(a_1, \ldots, a_h) \in R^{(h)}$, то говорят, что элементы $a_1, \ldots, a_h$ множества A *находятся в отношении* R, или что *отношение* R *выполняется* (или *верно*) на элементах $a_1, \ldots, a_h$, и записывают $R(a_1, \ldots, a_h)$.

Если $(a_1, \ldots, a_h) \notin R^{(h)}$, то говорят, что элементы $a_1, \ldots, a_h$ множества A *не находятся в отношении* R, или что *отношение* R *не выполняется* (или *не верно*) на элементах $a_1, \ldots, a_h$, и записывают $\overline{R}(a_1, \ldots, a_h)$.

Если $h = 1$ – h-арное отношение называется *унарным отношением*, или *свойством*. В этом случае любой элемент множества A или обладает этим свойством, или нет.

Если $h = 2$ – h-арное отношение называется *бинарным*. В этом случае любая пара элементов из множества A или находится в этом отношении, или нет.

Как правило, когда из контекста понятна арность отношения, верхний индекс при записи опускают. Пишут: R – h-арное отношение на множестве A.

Определение 3.2. Бинарное отношение $R^{(2)} \subseteq A^2$ называется

- *рефлексивным*, если оно выполняется на паре (x, x) для любого элемента x, то есть $\forall$[8] $x \in A \;\; R(x, x)$;

- *иррефлексивным*, если оно не выполняется на паре (x, x) для любого элемента x, то есть $\forall x \in A \;\; \overline{R}(x, x)$;

- *симметричным*, если из его выполнения на паре элементов (x, y) следует выполнение и на паре элементов (y, x), то есть $\forall x, y \in A \; R(x, y) \Rightarrow$[9] $R(y, x)$;

- *антисимметричным*, если его одновременное выполнение на парах элементов (x, y) и (y, x) возможно только в случае совпадения элементов x и y, то есть $\forall x, y \in A \;\; R(x, y)$ и $R(y, x) \Rightarrow x = y$;

[8]знак $\forall$ – *квантор всеобщности* – читается „для всех“, „для каждого“.

[9]знак $\Rightarrow$ – *логическое следование* – читается „следует“.

- *транзитивным*, если из его выполнения на парах элементов (x, y) и (y, z) следует выполнение на паре (x, z), то есть $\forall x, y, z \in A \;\; R(x, y)$ и $R(y, z) \Rightarrow R(x, z)$.

Определение 3.3. *n-й степенью* h-арного отношения $R^{(h)} \subseteq A^h$ (где $n \geq 2$ – натуральное число) называется h-арное отношение на множестве A^n, выполняющееся в точности на всех h-ках элементов множества A^n, в которых по каждой координате выполняется отношение R.

Обозначение:

$(R^n)^{(h)} = \{((a_1^1, \ldots, a_n^1), \ldots, (a_1^h, \ldots, a_n^h)) \mid R(a_i^1, \ldots, a_i^h), i = 1, \ldots, n\} \subseteq (A^n)^h$ – n-я степень отношения $R^{(h)}$, является h-арным отношением на множестве A^n.

3.2 Упражнения

Задача 3.1. Пусть A – множество слов толкового словаря В. Даля.

1. Являются ли свойствами на множестве A

1) имена существительные;
2) синонимы;
3) диалектизмы;
4) устаревшие слова?

2. Связаны ли бинарным отношением

1) однокоренные слова;
2) антонимы;
3) соседние слова;
4) наречия?

Задача 3.2. Является ли данное отношение свойством на множестве студентов некоторой группы:

1) множество „отличников“;
2) множество студентов, участвующих в самодеятельности;
3) множество пар студентов, играющих друг с другом в шахматы;
4) множество пар студентов, подготавливающих один диалог по иностранному языку.

Задача 3.3. Является ли данное отношение на множестве месяцев года бинарным:

1) множество пар месяцев одного времени года;
2) множество летних месяцев;
3) множество пар месяцев, один из которых следует за другим;
4) множество месяцев отопительного периода.

Задача 3.4. Какие из следующих бинарных отношений являются рефлексивными; иррефлексивными; симметричными; антисимметричными; транзитивными?

1. Пусть A – множество студентов какой-то группы, $R^{(2)} \subseteq A^2$ – бинарное отношение на множестве A, и R – множество пар студентов,

1) пишущих один вариант на контрольной;
2) в которых фамилия первого студента по алфавиту располагается раньше фамилии второго;
3) приехавших из разных городов;
4) получивших одинаковые оценки в сессию.

2. Пусть A – множество букв русского алфавита, $R^{(2)} \subseteq A^2$ – бинарное отношение на множестве A, и R – множество пар букв,

1) стоящих подряд по алфавиту;
2) первая из которых расположена в алфавите раньше, чем вторая;
3) являющихся гласными;
4) одна из которых – звонкая согласная, другая – соответствующая ей глухая согласная.

Задача 3.5. Для данного отношения R на множестве A описать его n-ю степень – отношение R^n на множестве A^n:

1) $A = \{0, 1\}$, $R^{(2)} \subseteq A^2$ и $R^{(2)} = \{(0, 0), (0, 1), (1, 1)\}$.

2) A – множество букв русского алфавита с символом пробела, R – бинарное отношение на множестве A, содержащее пары букв, первая из которых расположена в алфавите не позже, чем вторая. Считается, что пробел расположен раньше всех букв алфавита.

Задача 3.6. Доказать, что если бинарное отношение R на множестве A является одновременно и симметричным, и антисимметричным, то оно является также и транзитивным.

Задача 3.7. Пусть A – множество из k элементов. Сколько можно определить различных

1) свойств на множестве A;
2) бинарных отношений на множестве A.

3.3 Отношение эквивалентности

Определение 3.4. Бинарное отношение $R^{(2)} \subseteq A^2$ называется *отношением эквивалентности* (на множестве A), если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно.

Теорема 3.1. *Если R – отношение эквивалентности на множестве A, то его n-я степень R^n – отношение эквивалентности на множестве A^n, $n \geq 2$.*

Определение 3.5. *Классом эквивалентности* по отношению эквивалентности R, *порожденным элементом* a, называется множество всех таких элементов множества A, которые находятся в отношении R с элементом a.

Обозначение:
$[a]_R = \{b \in A \mid R(a, b)\}$ – класс эквивалентности по отношению эквивалентности R, порожденный элементом $a \in A$.

Теорема 3.2. *1. Классы эквивалентности или не пересекаются, или совпадают.*

2. Класс эквивалентности порождается любым своим элементом.

Следствие 3.2.1. *Отношение эквивалентности разбивает множество, на котором оно задано, на классы эквивалентности.*

Определение 3.6. *Фактор-множеством* множества A по отношению эквивалентности R называется множество всех классов эквивалентности по этому отношению.

Обозначение:
$A/R = \{[a]_R \mid a \in A\}$ – фактор-множество множества A по отношению эквивалентности R.

Как правило, отношение эквивалентности обозначают $\sim$ и говорят „*эквивалентно*“.

Пусть $\sim$ – отношение эквивалентности на множестве A.

Записывают $x \sim y$ и говорят „элемент x *эквивалентен* элементу y“.

3.4 Упражнения

Задача 3.8. Пусть A – множество студентов некоторого вуза. Является ли бинарное отношение R на множестве A отношением эквивалентности? Если „да“, найти фактор-множество по этому отношению эквивалентности.

1) R – множество пар студентов, получивших одинаковое количество вступительных баллов;
2) R – множество пар студентов, празднующих день рождения в одном месяце;
3) R – множество пар студентов из одной группы;
4) R – множество пар студентов с разных курсов.

Задача 3.9. Пусть A – множество месяцев года. Является ли бинарное отношение R на множестве A отношением эквивалентности? Если „да“, найти фактор-множество по этому отношению эквивалентности.

1) R – множество пар месяцев одного времени года;
2) R – множество пар месяцев разных времен года.

Задача 3.10. Пусть A – множество букв русского алфавита. Является ли бинарное отношение R на множестве A отношением эквивалентности? Если „да“, найти фактор-множество по этому отношению эквивалентности.

1) R – множество пар согласных букв одинаковой звонкости;
2) R – множество пар букв, содержащих или две согласные, или две гласные буквы.

Задача 3.11. Определяется ли отношением эквивалентности

1) разбиение месяцев года по временам года;
2) распределение студентов факультета по группам;
3) распределение станций метрополитена по веткам;
4) распределение местности на зоны пригородного сообщения?

Задача 3.12. Пусть A – множество прямых на плоскости. Является ли бинарное отношение R на множестве A отношением эквивалентности? Если „да“, найти фактор-множество по этому отношению эквивалентности.

1) R – множество пар параллельных прямых;
2) R – множество пар перпендикулярных прямых?

Задача 3.13. Является ли бинарное отношение R на множестве A отношением эквивалентности? Если „да“, найти фактор-множество по этому отношению эквивалентности.

1) A – множество натуральных чисел, R – множество пар натуральных чисел, первое из которых является делителем второго;

2) A – множество целых чисел, R – множество пар целых чисел, разность которых делится на m, где $m \geq 1$ – заданное натуральное число.

Задача 3.14. Пусть $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ – подмножество множества натуральных чисел. Является ли бинарное отношение R на множестве A^2 отношением эквивалентности? Если „да“, найти классы эквивалентности и фактор-множество по этому отношению эквивалентности.

1) $R = \{((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \in (A^2)^2 \mid x_1 = x_2, y_1 = y_2\}$;
2) $R = \{((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \in (A^2)^2 \mid x_1 + y_1 = x_2 + y_2\}$;
3) $R = \{((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \in (A^2)^2 \mid x_1 + y_1 \neq x_2 + y_2\}$;
4) $R = \{((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \in (A^2)^2 \mid |y_1 - x_1| = |y_2 - x_2|\}$.

Задача 3.15. Пусть R – отношение эквивалентности на конечном множестве A. Верно ли, что

1) все классы эквивалентности по отношению R содержат одинаковое число элементов множества A;

2) каждый элемент множества A принадлежит какому-нибудь классу эквивалентности по отношению R;

3) могут быть элементы в множестве A, принадлежащие нескольким разным классам эквивалентности по отношению R;

4) количество классов эквивалентности по отношению R не зависит от того, по каким элементам множества A они построены?

3.5 Отношение частичного порядка

Определение 3.7. Бинарное отношение $R^{(2)} \subseteq A^2$ называется *частичным порядком* (на множестве A), если оно рефлексивно, антисимметрично и транзитивно.

Обозначение:

$(A; R)$ – на множестве A задан частичный порядок R.

Определение 3.8. Множество A с заданным на нем частичным порядком R называется *частично упорядоченным* множеством.

Теорема 3.3. *Если R – частичный порядок на множестве A, то его n-я степень R^n – частичный порядок на множестве A^n, $n \geq 2$.*

Определение 3.9. Элементы x и y частично упорядоченного множества $(A; R)$ называют *сравнимыми*, если верно или $R(x, y)$, или $R(y, x)$. Элементы x и y множества A называют *несравнимыми*, если они не являются сравнимыми.

Определение 3.10. Частичный порядок $R^{(2)} \subseteq A^2$ называется *линейным порядком*, если любые два элемента множества A сравнимы.

Определение 3.11. Множество A с заданным на нем линейным порядком R называется *линейно упорядоченным* множеством.

Как правило, частичный порядок обозначают $\leq$ и говорят „*меньше или равно*“.

Обозначение:

$(A; \leq)$ – на множестве A задан частичный порядок $\leq$.

Записывают $x \leq y$ и говорят „элемент x *меньше* элемента y *или равен* ему“.

Записывают $x < y$ и говорят „элемент x (*строго*) *меньше* элемента y“, если верно, что $x \leq y$ и элемент x не совпадает с элементом y.

Записывают $x \lessdot y$ и говорят „элемент x *непосредственно предшествует* элементу y“, если верно, что $x < y$ и не существует такой элемент z, что $x < z < y$.

Если $x \leq y$, то также говорят, что „элемент y *больше* элемента x *или равен* ему. Аналогично при $x < y$ и $x \lessdot y$ говорят соответственно „(*строго*) *больше*“ и „*непосредственно следует*“.

Определение 3.12. Элемент a частично упорядоченного множества называется *минимальным*, если не существует такой элемент x в множестве A, что $x < a$.

Элемент минимальный, если нет элементов, которые меньше его. Минимальных элементов может быть несколько.

Определение 3.13. Элемент a частично упорядоченного множества называется *наименьшим*, если для любого элемента x множества A верно $a \leq x$.

Элемент наименьший, если он меньше всех других. Если наименьший элемент есть, то он всегда единственный. Наименьший элемент является минимальным элементом, обратное в общем случае не верно.

Аналогично вводятся понятия *максимального* и *наибольшего* элементов частично упорядоченного множества.

Определение 3.14. *Диаграммой Хассе*[10] частично упорядоченного множества $(A; \leq)$ называется фигура на плоскости, которая получается, если

1) каждому элементу x множества A сопоставлена некоторая точка плоскости p_x, причем разным элементам сопоставлены разные точки;

2) для любых элементов x и y множества A верно, что если $x \lessdot y$, то от точки p_x к точке p_y проведен направленный отрезок непрерывной кривой.

Определение 3.15. Множество элементов C частично упорядоченного множества $(A; \leq)$ назовем *цепью*, если все они попарно сравнимы.

Так как все элементы цепи сравнимы, их можно линейно упорядочить. Поэтому в конечной цепи всегда есть наименьший и наибольший элементы.

Определение 3.16. *Длиной* конечной цепи в частично упорядоченном множестве называется число, равное ее мощности. Один элемент частично-упорядоченного множества всегда образует цепь длины 1.

Замечание 3.1. Часто в литературе длиной конечной цепи в частично-упорядоченном множестве считается число, на единицу меньшее ее мощности. В этом случае один элемент частично-упорядоченного множества всегда образует цепь длины 0.

Определение 3.17. *Длиной* конечного частично упорядоченного множества называется длина максимальной цепи в нем.

Определение 3.18. Множество элементов D частично упорядоченного множества $(A; \leq)$ назовем *антицепью*, если все они попарно не сравнимы.

[10] Гельмут Хассе (Hasse) – немецкий математик XX века.

Определение 3.19. *Шириной* конечной антицепи в частично-упорядоченном множестве называется число, равное ее мощности. Один элемент частично упорядоченного множества всегда образует антицепь ширины 1.

Определение 3.20. *Шириной* конечного частично упорядоченного множества называется ширина максимальной антицепи в нем.

Теорема 3.4 (Дилуорс[11]). *Ширина конечного частично упорядоченного множества равна минимальному числу цепей, на которое можно разбить это множество.*

3.6 Упражнения

Задача 3.16. Пусть A – множество студентов некоторой группы. Является ли бинарное отношение R на множестве A частичным порядком? Если „да", является ли этот порядок линейным?

1) R – множество пар студентов, фамилия первого из которых располагается по алфавиту не позже фамилии второго;
2) R – множество пар студентов, сумма вступительных баллов первого из которых не меньше суммы вступительных баллов второго.

Задача 3.17. Пусть A – множество месяцев года. Является ли бинарное отношение R на множестве A частичным порядком? Если „да", является ли этот порядок линейным?

1) R – множество пар месяцев, первый из которых идет в календаре не позже второго;
2) R – множество пар месяцев одного времени года.

Задача 3.18. Определяется ли отношением частичного порядка

1) турнирная таблица участников соревнований;
2) список студентов группы по алфавиту;
3) распределение станций метрополитена по веткам;
4) распределение местности на зоны пригородного сообщения?

Задача 3.19. Пусть A – множество точек на прямой с заданным направлением. Является ли бинарное отношение R на множестве A частичным порядком? Если „да", является ли этот порядок линейным?

[11] Роберт Палмер Дилуорс (Dilworth) – американский математик XX века.

1) R – множество пар точек, вторая из которых расположена на прямой правее первой или совпадает с ней;
2) R – множество пар точек, расстояние между которыми равно единичному отрезку.

Задача 3.20. Является ли бинарное отношение R на множестве A частичным порядком? Если „да“, является ли этот порядок линейным?

1) A – множество натуральных чисел, R – множество пар натуральных чисел, первое из которых является делителем второго;
2) A – множество целых чисел, R – множество пар целых чисел, разность которых делится на m, где $m \geq 1$ – заданное натуральное число.

Задача 3.21. Пусть $A = \{1, 2, 3\}$ – подмножество множества натуральных чисел. Является ли бинарное отношение R на множестве A^2 частичным порядком? Если „да“, является ли этот порядок линейным?

1) $R = \{((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \in (A^2)^2 \mid x_1 \leq x_2, y_1 \leq y_2\}$;
2) $R = \{((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \in (A^2)^2 \mid x_1 + y_1 \leq x_2 + y_2\}$;
3) $R = \{((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \in (A^2)^2 \mid (x_1, y_1) = (x_2, y_2)$ или $x_1 + y_1 < x_2 + y_2\}$;
4) $R = \{((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \in (A^2)^2 \mid (x_1, y_1) = (x_2, y_2)$ или $|y_1 - x_1| < |y_2 - x_2|\}$.

Для частичных порядков построить диаграмму Хассе, найти минимальные, максимальные, наименьший и наибольший (если они есть) элементы.

Задача 3.22. Пусть A – конечное множество. Доказать, что множество всех его подмножеств $P(A)$ является частично упорядоченным множеством относительно отношения $\subseteq$. Найти его наименьший и наибольший элементы.

Задача 3.23. 1. Доказать, что если в частично упорядоченном множестве есть наименьший (наибольший) элемент, то он единственный.

2. Доказать, что если в частично упорядоченном множестве есть наименьший (наибольший) элемент, то он является единственным минимальным (максимальным) элементом этого частично упорядоченного множества.

Задача 3.24. Доказать, что если $R^{(2)} \subseteq A^2$ – иррефлексивное и транзитивное отношение на множестве A, то отношение

$$R' = R \cup \{(x, x) \mid x \in A\}$$

является частичным порядком на множестве A.

Задача 3.25. Пусть $R^{(2)} \subseteq A^2$ – бинарное отношение на множестве A. Доказать, что отношение R является одновременно и отношением эквивалентности, и отношением частичного порядка на множестве A, если и только если

$$R = \{(x, x) \mid x \in A\}.$$

3.7 Булев куб

Определение 3.21. *Булевым*[12] *множеством* назовем множество $B = \{0, 1\}$.

На множестве B введем линейный порядок $\leq$: $0 < 1$.

Определение 3.22. *n-мерным булевым кубом* (где $n \geq 1$ – натуральное число) назовем множество B^n с частичным порядком $\leq^n$.

Обозначение:
$B^n = \{(a_1, \dots, a_n) \mid a_i \in B, i = 1, \dots, n\}$ – n-мерный булев куб.
$(B^n; \leq)$ – n-мерный куб B^n – частично упорядоченное множество.
Если $\alpha = (a_1, \dots, a_n), \beta = (b_1, \dots, b_n) \in B^n$, то $\alpha \leq \beta$, если $a_i \leq b_i$ при всех $i = 1, \dots, n$.

В частично упорядоченном множестве $(B^n; \leq)$ есть наименьший элемент: $(0, \dots, 0) \in B^n$, и наибольший элемент: $(1, \dots, 1) \in B^n$.

Определение 3.23. Наборы из B^n будем называть *точками* n-мерного булева куба.

Определение 3.24. *Весом* набора $\alpha = (a_1, \dots, a_n) \in B^n$ назовем число единиц в нем.

Обозначение:
$|\alpha| = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i$ – вес набора $\alpha \in B^n$.

[12] Джорж Буль (Boole) – английский математик и логик XIX века.

Определение 3.25. *k-м слоем* куба B^n $(0 \le k \le n)$ назовем подмножество всех его наборов веса k.

Обозначение:
$B_k^n = \{\alpha \in B^n \mid |\alpha| = k\}$ – k-й слой куба B^n.

Теорема 3.5. *Мощность k-го слоя $(0 \le k \le n)$ куба B^n равна C_n^k, то есть $|B_k^n| = C_n^k$.*

Определение 3.26. *Номером* набора $\alpha = (a_1, \ldots, a_n) \in B^n$ назовем число, которое в двоичной системе счисления записывается как $a_1 a_2 \ldots a_n$.

Обозначение:
$\nu(\alpha) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i \cdot 2^{n-i}$ – номер набора $\alpha \in B^n$.

Определение 3.27. *Расстоянием* (по Хэммингу[13]) между наборами $\alpha = (a_1, \ldots, a_n)$ и $\beta = (b_1, \ldots, b_n)$ куба B^n назовем число координат, в которых они различаются.

Обозначение:
$d(\alpha, \beta) = \sum\limits_{i=1}^{n} |a_i - b_i|$ – расстояние между наборами α и β из куба B^n.

Определение 3.28. *Соседними* (по i-й координате) назовем наборы, которые отличаются только в одной (i-й) координате.

$\alpha, \beta \in B^n$ – соседние наборы, если $d(\alpha, \beta) = 1$.
Соседние наборы всегда сравнимы. Если $\alpha, \beta \in B^n$ – соседние наборы и $\alpha \le \beta$, то $\alpha \lessdot \beta$.

Определение 3.29. *Противоположными* назовем наборы, которые отличаются во всех координатах.

$\alpha, \beta \in B^n$ – противоположные наборы, если $d(\alpha, \beta) = n$.

Теорема 3.6. *Длина куба B^n равна $(n+1)$.*

Теорема 3.7. *Ширина куба B^n равна $C_n^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$.*

Теорема 3.8. *Ширина куба B^n достигается*

1) при четных n только на множестве всех наборов среднего слоя $B_{\frac{n}{2}}^n$;

2) при нечетных n только на каждом из множеств всех наборов двух средних слоев $B_{\frac{n-1}{2}}^n$ и $B_{\frac{n+1}{2}}^n$.

---
[13]Ричард Уэсли Хэмминг (Hamming) – американский математик XX века.

3.8 Упражнения

Задача 3.26. 1. Найти веса следующих наборов $\alpha \in B^n$:

1) $\alpha = (110) \in B^3$; 3) $\alpha = (0101) \in B^4$;
2) $\alpha = (111) \in B^3$; 4) $\alpha = (10111) \in B^5$.

2. Перечислить все наборы, принадлежащие слою

1) B^3_0; 3) B^4_2;
2) B^3_2; 4) B^5_4.

Задача 3.27. 1. Найти номера следующих наборов $\alpha \in B^n$:

1) $\alpha = (010) \in B^3$; 3) $\alpha = (1001) \in B^4$;
2) $\alpha = (111) \in B^3$; 4) $\alpha = (10110) \in B^5$.

2. Найти наборы $\alpha \in B^n$ по их номерам $\nu(\alpha)$:

1) $\alpha \in B^3$, $\nu(\alpha) = 5$; 3) $\alpha \in B^4$, $\nu(\alpha) = 12$;
2) $\alpha \in B^4$, $\nu(\alpha) = 5$; 4) $\alpha \in B^5$, $\nu(\alpha) = 21$.

Задача 3.28. 1. Найти все соседние и противоположные наборы к следующим наборам $\alpha \in B^n$:

1) $\alpha = (000) \in B^3$; 3) $\alpha = (1110) \in B^4$;
2) $\alpha = (010) \in B^3$; 4) $\alpha = (00110) \in B^5$.

2. Найти все наборы, отстоящие на расстояние d от следующих наборов $\alpha \in B^n$:

1) $\alpha = (100) \in B^3$, $d = 1$; 3) $\alpha = (0101) \in B^4$, $d = 2$;
2) $\alpha = (111) \in B^3$, $d = 2$; 4) $\alpha = (10011) \in B^5$, $d = 5$.

Задача 3.29. 1. Найти количество наборов из B^n, соседних с заданным набором $\alpha \in B^n$.

2. Найти количество наборов из B^n, отстоящих от заданного набора $\alpha \in B^n$ на расстояние d, $0 \le d \le n$.

Задача 3.30. 1. Доказать, что количество максимальных цепей куба B^n равно $n!$

2. Доказать, что количество максимальных цепей куба B^n, содержащих набор $\alpha \in B^n_k$, равно $k! \cdot (n-k)!$

3. Доказать, что ширина куба B^n не меньше, чем $C_n^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$.

4. Доказать, опираясь на п.п. 1-2 и теорему 3.4, что ширина куба B^n не больше, чем $C_n^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$.

Задача 3.31. Доказать, что у куба B^n

1) при четных n есть только одна максимальная антицепь – средний слой $B^n_{\frac{n}{2}}$;

2) при нечетных n есть только две максимальные антицепи – два средних слоя $B^n_{\frac{n-1}{2}}$ и $B^n_{\frac{n+1}{2}}$.

Задача 3.32. Разбить на минимальное число цепей куб

1) B^1; 3) B^3;
2) B^2; 4) B^4.

Задача 3.33. Построим по индукции следующее разбиение куба B^n на цепи.

Базис индукции. Куб B^1 разобьем на одну цепь $C_1 = \{(0), (1)\}$.

Индуктивный переход. Пусть куб B^n уже разбит на цепи. Разбиение куба B^{n+1} устроим следующим образом. Пусть C – произвольная цепь разбиения куба B^n и $\alpha = (a_1, \dots, a_n)$ – ее максимальный элемент. Включим две цепи C' и C'' в разбиение куба B^{n+1}:

$$C' = \{\beta \in B^{n+1} \mid \beta = (0, b_1, \dots, b_n), \text{ где } (b_1, \dots, b_n) \in C \text{ или } \\ \beta = (1, a_1, \dots, a_n)\};$$

$$C'' = \{\beta \in B^{n+1} \mid \beta = (1, b_1, \dots, b_n), \text{ где } (b_1, \dots, b_n) \in C\} \setminus \\ \setminus \{(1, a_1, \dots, a_n)\}.$$

Полученнное разбиение куба B^n на цепи называется разбиением на *цепи Анселя*[14].

1. Разбить на цепи Анселя куб

1) B^1; 3) B^3;
2) B^2; 4) B^4.

2. Доказать индукцией по n, что в разбиении куба B^n на цепи Анселя

1) всего цепей ровно $C_n^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$;

2) цепей длины $n - 2 \cdot p + 1$ ровно $C_n^p - C_n^{p-1}$, $p = 0, 1, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$;

3) в любой цепи длины $n - 2 \cdot p + 1$, где $p = 0, 1, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, минимальный элемент содержит $(n - p)$ нулей и p единиц и максимальный элемент содержит p нулей и $(n - p)$ единиц;

4) для любых трех наборов вида

[14] Жорж Ансель (Hansel) – французский математик XX века.

$\alpha_1 = (a_1, \dots, a_{i-1}, 0, a_{i+1}, \dots, a_{j-1}, 0, a_{j+1}, \dots, a_n),$
$\alpha_2 = (a_1, \dots, a_{i-1}, 0, a_{i+1}, \dots, a_{j-1}, 1, a_{j+1}, \dots, a_n),$
$\alpha_3 = (a_1, \dots, a_{i-1}, 1, a_{i+1}, \dots, a_{j-1}, 1, a_{j+1}, \dots, a_n),$

принадлежащих цепи длины $n - 2 \cdot p + 1$, $p = 0, 1, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, набор

$\beta = (a_1, \dots, a_{i-1}, 1, a_{i+1}, \dots, a_{j-1}, 0, a_{j+1}, \dots, a_n)$

принадлежит цепи длины $n - 2 \cdot p - 1$.

Задача 3.34. Пусть $I = \{i_1, \dots, i_r\} \subseteq \{1, \dots, n\}$, $0 \le r \le n$. Назовем множество I *направлением. Гранью* куба B^n по направлению $I = \{i_1, \dots, i_r\}$ назовем подмножество его наборов, в которых в координатах $i_1, \dots, i_r$ стоят известные значения $\sigma_1, \dots, \sigma_r \in B$, а оставшиеся координаты – произвольны. Другими словами, если Γ – грань по направлению $I = \{i_1, \dots, i_r\}$, то

$$\Gamma = \{\alpha = (a_1, \dots, a_n) \in B^n \mid a_{i_1} = \sigma_1, \dots, a_{i_r} = \sigma_r\}$$

для некоторых $\sigma_1, \dots, \sigma_r \in B$. Число $(n - r)$ при этом называется *размерностью* грани.

1. Доказать, что грань размерности $(n - r)$ является подкубом B^{n-r}.

2. Доказать, что

1) две грани по одному направлению I не пересекаются и каждый набор куба B^n принадлежит в точности одной такой грани;

2) все грани по одному направлению I образуют разбиение куба B^n.

3. Подсчитать в кубе B^n

1) количество граней по одному направлению $I = \{i_1, \dots, i_r\}$, $0 \le r \le n$;

2) количество граней размерности $(n - r)$, $0 \le r \le n$.

4. Подсчитать количество всех граней куба B^n.

Задача 3.35. Пусть $\gamma(n, r)$ – число граней куба B^n размерности $(n - r)$ (см. задачу 3.34). Доказать, что последовательность $\gamma(n, r)$ при фиксированном n возрастает при $r < \frac{2n-1}{3}$ и убывает при $r > \frac{2n-1}{3}$.

Задача 3.36. Доказать, что множество всех граней в кубе B^n (см. задачу 3.34) частично упорядочено по отношению $\subseteq$. Найти минимальные и наибольший элементы этого частичного порядка.

4 Последовательности

4.1 Возвратные последовательности

Определение 4.1. Если каждому натуральному числу n поставлено в соответствие некоторое число x_n, то говорят, что задана *последовательность* $\{x_n\}$. При этом числа x_n называются *элементами* последовательности $\{x_n\}$.

Обозначение:
$\{x_n\}$ – последовательность $\{x_n\}$.

Если все числа x_n – натуральные, целые, рациональные, действительные или комплексные числа, то говорят о соответствующих последовательностях натуральных, целых, рациональных, действительных или комплексных чисел.

Определение 4.2. Последовательность $\{x_n\}$ задана *явно*, если

$$x_n = f(n),$$

где $f(n)$ – некоторая функция.

Определение 4.3. Последовательность $\{x_n\}$ задана *рекуррентно*, или задана *рекуррентным уравнением* (*степени* k), если

$$x_n = f(x_{n-1}, \ldots, x_{n-k}),$$

где $f(x_{n-1}, \ldots, x_{n-k})$ – некоторая функция, $k \geq 1$.

Если последовательность $\{x_n\}$ задана рекуррентным уравнением степени k и известны ее первые k элементов $x_1, \ldots, x_k$, то вся последовательность однозначно находится, так как

$$x_{k+1} = f(x_k, \ldots, x_1),\ x_{k+2} = f(x_{k+1}, \ldots, x_2), \ldots$$

Определение 4.4. *Решить рекуррентное уравнение* – значит найти все такие последовательности, которые, будучи подставлены в это уравнение, при каждом значении n превратят его в верное равенство (тождество). При этом множество всех таких последовательностей называется *общим решением* рекуррентного уравнения, а каждая из последовательностей этого множества – *частным решением* рекуррентного уравнения.

Определение 4.5. *Линейным однородным рекуррентным уравнением* называется уравнение вида

$$x_n + p_1 x_{n-1} + \ldots + p_k x_{n-k} = 0,$$

$p_1, \ldots, p_k$ – некоторые числа, $k \geq 1$.

Определение 4.6. *Характеристическим многочленом* линейного однородного рекуррентного уравнения

$$x_n + p_1 x_{n-1} + \ldots + p_k x_{n-k} = 0$$

называется многочлен комплексной переменной

$$P(x) = x^k + p_1 x^{k-1} + \ldots + p_{k-1} x + p_k.$$

Теорема 4.1. *Пусть* $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ *– все корни характеристического многочлена линейного однородного рекуррентного уравнения кратности* r_1, $\ldots$, r_s *соответственно,* $r_1 + \ldots + r_s = k$. *Тогда общее решение этого уравнения имеет вид*

$$x_n = \sum_{i=1}^{s} (C_{i,0} + C_{i,1} n + \ldots + C_{i,r_i-1} n^{r_i-1}) \cdot \lambda_i^n,$$

$C_{i,0}, C_{i,1}, \ldots, C_{i,r_i-1}$ *– произвольные (комплексные) числа,* $i = 1, \ldots, s$.

Определение 4.7. *Возвратной* называется последовательность, являющаяся решением какого-то линейного однородного рекуррентного уравнения. Другими словами, *возвратная* последовательность задается каким-то линейным однородным рекуррентным уравнением.

Определение 4.8. *Линейным неоднородным рекуррентным уравнением* называется уравнение вида

$$x_n + p_1 x_{n-1} + \ldots + p_k x_{n-k} = f(n),$$

$p_1, \ldots, p_k$ – некоторые числа, $k \geq 1$, и $f(n)$ – некоторая функция, не равная тождественно 0.

Если в линейном неоднородном рекуррентном уравнении заменить правую часть (то есть функцию $f(n)$) на 0, то полученное линейное однородное рекуррентное уравнение называется *соответствующим* исходному неоднородному уравнению.

Теорема 4.2. *Общим решением линейного неоднородного рекуррентного уравнения является сумма какого-то его частного решения и общего решения соответствующего ему линейного однородного рекуррентного уравнения.*

Теорема 4.3. *Для линейного неоднородного рекуррентного уравнения*

$$x_n + p_1 x_{n-1} + \ldots + p_k x_{n-k} = (d_0 + d_1 n + \ldots + d_m n^m) \cdot \lambda^n,$$

$p_1, \ldots, p_k, d_0, d_1, \ldots, d_m, \lambda$ *– некоторые числа,* $\lambda \neq 0$, $k \geq 1$, *существует частное решение вида*

1) $x'_n = (c_0 + c_1 n + \ldots + c_m n^m) \cdot \lambda^n$, *где* $c_0, c_1, \ldots, c_m$ *– некоторые числа, если* λ *не является корнем характеристического многочлена соответствующего линейного однородного рекуррентного уравнения;*

2) $x'_n = n^r \cdot (c_0 + c_1 n + \ldots + c_m n^m) \cdot \lambda^n$, *где* $c_0, c_1, \ldots, c_m$ *– некоторые числа, если* λ *– корень кратности* r *характеристического многочлена соответствующего линейного однородного рекуррентного уравнения.*

Общее решение однородного уравнения находится в соответствии с теоремой 4.1. Частное решение неоднородного уравнения можно искать в виде, указанном в теореме 4.3, методом *неопределенных коэффициентов.*

Пример 4.1. Решить линейное однородное рекуррентное уравнение

$$x_n - 2x_{n-1} - 15x_{n-2} = 0, \ x_1 = -1, \ x_2 = 43.$$

Решение. Найдем его характеристический многочлен: $P(x) = x^2 - 2x - 15$. Решим уравнение $P(x) = x^2 - 2x - 15 = 0$. Откуда $x = -3$ и $x = 5$ – корни характеристического многочлена.

Следовательно, общее решение исходного уравнения имеет вид:

$$x_n = C_1 \cdot (-3)^n + C_2 \cdot 5^n,$$

где C_1 и C_2 – произвольные константы.

Подставим в общее решение значения x_1 и x_2. Получаем систему уравнений для коэффициентов C_1 и C_2:

$$\begin{cases} -3C_1 + 5C_2 = -1, \\ 9C_1 + 25C_2 = 43. \end{cases}$$

Решая ее, находим $C_1 = 2$, $C_2 = 1$. Искомая последовательность

$$x_n = 2 \cdot (-3)^n + 5^n.$$

Ответ: $2 \cdot (-3)^n + 5^n$.

Пример 4.2. Решить линейное неоднородное рекуррентное уравнение

$$x_n - 4x_{n-1} + 4x_{n-2} = 2n - 9,\ x_1 = 9,\ x_2 = 31.$$

Решение. Сначала рассмотрим соответствующее однородное рекуррентное уравнение $x_n - 4x_{n-1} + 4x_{n-2} = 0$. Найдем его характеристический многочлен: $P(x) = x^2 - 4x + 4$. Решим уравнение $P(x) = x^2 - 4x + 4 = 0$. Откуда $x = 2$ – корень характеристического многочлена кратности 2. Общее решение соответствующего однородного рекуррентного уравнения имеет вид:

$$(C_1 + C_2 n) \cdot 2^n,$$

где C_1 и C_2 – произвольные константы.

Найдем частное решение исходного уравнения. Будем искать его в виде $c_0 + c_1 n$, где c_0 и c_1 – некоторые константы, так как 1 не является корнем характеристического многочлена $P(x)$. Получаем

$$(c_0 + c_1 n) - 4(c_0 + c_1(n-1)) + 4(c_0 + c_1(n-2)) = (c_0 - 4_1) + c_1 n = -9 + 2n.$$

Приравнивая соответствующие коэффициенты при степенях n, находим:

$$c_0 = -1,\ c_1 = 2.$$

Следовательно, общее решение исходного уравнения имеет вид:

$$x_n = (C_1 + C_2 n) \cdot 2^n + (2n - 1),$$

где C_1 и C_2 – произвольные константы.

Подставим в общее решение значения x_1 и x_2. Получаем систему уравнений для коэффициентов C_1 и C_2:

$$\begin{cases} 2C_1 + 2C_2 + 1 = 9, \\ 4C_1 + 8C_2 + 3 = 31, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} C_1 + C_2 = 4, \\ C_1 + 2C_2 = 7. \end{cases}$$

Решая ее, находим $C_1 = 1$, $C_2 = 3$. Искомая последовательность

$$x_n = (1 + 3n) \cdot 2^n + (2n - 1).$$

Ответ: $(1 + 3n) \cdot 2^n + (2n - 1)$.

4.2 Упражнения

Задача 4.1. Найти общее решение следующих линейных однородных рекуррентных уравнений:

1) $x_n - 2x_{n-1} = 0$;
2) $x_n - 2x_{n-1} + x_{n-2} = 0$;
3) $x_n + 3x_{n-1} + 2x_{n-2} = 0$;
4) $x_n + x_{n-1} + 12x_{n-2} = 0$;
5) $x_n - 8x_{n-3} = 0$;
6) $x_n - x_{n-1} - 2x_{n-2} + 2x_{n-3} = 0$;
7) $x_n - 3\sqrt{3}x_{n-1} + 9x_{n-2} - 3\sqrt{3}x_{n-3} = 0$;
8) $x_n - 6x_{n-1} + 11x_{n-2} - 6x_{n-3} = 0$.

Задача 4.2. Решить следующие линейные однородные рекуррентные уравнения:

1) $x_n - 3x_{n-1} = 0$, $x_1 = 15$;
2) $x_n + x_{n-1} - 2x_{n-2} = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = 3$;
3) $x_n - 4x_{n-1} + 4x_{n-2} = 0$, $x_1 = 8$, $x_2 = 28$;
4) $x_n - 5x_{n-1} + 6x_{n-2} = 0$, $x_1 = 2$, $x_2 = 5$;
5) $x_n - x_{n-1} - 2x_{n-2} + 2x_{n-3} = 0$, $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 3$, $x_3 = 2$;
6) $x_n - 3x_{n-1} + 3x_{n-2} + x_{n-3} = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, $x_3 = 7$;
7) $x_n - 3x_{n-1} + 4x_{n-3} = 0$, $x_1 = 5$, $x_2 = 21$, $x_3 = 55$;
8) $x_n - x_{n-3} = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 2$.

Задача 4.3. Найти общее решение следующих линейных неоднородных рекуррентных уравнений:

1) $x_n - x_{n-1} = 3$;
2) $x_n - 5x_{n-1} = 6$;
3) $x_n + 3x_{n-1} = 3n - 4$;
4) $x_n - 5x_{n-1} + 6x_{n-2} = 3 \cdot 2^{n-1}$;
5) $x_n - x_{n-1} - 6x_{n-2} = (2n + 5) \cdot 3^n$;
6) $x_n - 3x_{n-1} + 3x_{n-2} - x_{n-3} = 3 \cdot 2^n$;
7) $x_n - 7x_{n-1} + 15x_{n-2} - 9x_{n-3} = 3^{n-1}$;
8) $x_n - x_{n-1} - 3x_{n-2} + 3x_{n-3} = -10$.

Задача 4.4. Решить следующие линейные неоднородные рекуррентные уравнения:

1) $x_n - 3x_{n-1} = 2 \cdot 3^n$, $x_1 = 9$;
2) $x_n - x_{n-1} = 2n - 2$, $x_1 = 1$;
3) $x_n - 2x_{n-2} = (\sqrt{2})^{n+2}$, $x_1 = 0$, $x_2 = 6$;
4) $x_n - x_{n-1} - 12x_{n-2} = 7 \cdot 4^{n-1}$, $x_1 = -2$, $x_2 = 50$;
5) $x_n - 2x_{n-1} + x_{n-2} = (n - 2) \cdot 2^{n-2}$, $x_1 = 5$, $x_2 = 9$;
6) $x_n - 6x_{n-1} + 12x_{n-2} - 8x_{n-3} = 1$, $x_1 = -3$, $x_2 = -5$, $x_3 = 7$;
7) $x_n - 2x_{n-1} - 5x_{n-2} + 6x_{n-3} = -4(3n + 8)$, $x_1 = 2$, $x_2 = 10$, $x_3 = 15$;
8) $x_n - x_{n-3} = n^2 - 3n + 1$, $x_1 = \frac{1}{9}$, $x_2 = \frac{8}{9}$, $x_3 = 5$.

Задача 4.5. Найти явное выражение элементов последовательности Фибоначчи[15] $\{f_n\}$, которая задается условиями: $f_1 = f_2 = 1$, $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$.

Задача 4.6. Доказать, что арифметическая прогрессия является возвратной последовательностью. Построить рекуррентное уравнение, задающее арифметическую прогрессию с первым членом a_1 и разностью d.

Задача 4.7. Доказать, что геометрическая прогрессия является возвратной последовательностью. Построить рекуррентное уравнение, задающее геометрическую прогрессию с первым членом b_1 и знаменателем q.

Задача 4.8. 1. Доказать, что следующие последовательности являются возвратными:

1) $x_n = n$;	3) $x_n = n^3$;
2) $x_n = n^2$;	4) $x_n = n^4$.

Найти задающие их рекуррентные уравнения.

2. Доказать, что последовательность $x_n = n^k$, где $k \geq 1$ – натуральное число, является возвратной. Найти задающее ее рекуррентное уравнение.

[15]Фибоначчи, или Леонардо Пизанский (Fibonacci) – итальянский математик XII-XIII веков.

5 Ответы

К разделу 1.2

1.4 1) $x \notin A$, или $x \notin B$, или $x \in C$; 2) $x \notin A, B$, $x \in C$; 3) $x \notin A$, или $x \in B$, или $x \notin C$; 4) $x \notin A, C$ или $x \in B$, $x \notin C$; 5) $x \in A, B, C$; 6) $x \in A, B$ или $x \in A, C$; 7) $x \notin A, B$ или $x \notin C$; 8) $x \notin A$, $x \in C$ или $x \notin B$, $x \in C$.

1.6 1) то $B \subseteq A$; 2) то $A \subseteq B$; 3) то $A \cap B = \emptyset$; 4) верно, если $B \subseteq A$; 5) верно, если $B \subseteq A$; 6) верно, если $A = \emptyset$; 7) верно, если $B = C$; 8) верно, если $B = C$.

1.7 1) $A \cap C$; 2) $\overline{A} \cap \overline{D}$; 3) $\overline{D} \cap B$; 4) $A \cap C \cap D$; 5) $D \cap (A \cup B))$; 6) $B \cap \overline{A} \cap \overline{C}$; 7) $C \cap (\overline{A} \cup \overline{D})$; 8) $B \cap A \cap D \cap \overline{C}$.

1.9 4. 1) множество пар натуральных чисел; 2) координатная плоскость; 3) ось ординат; 4) полоса на координатной плоскости между прямыми $y = 0$ и $y = 1$, содержащая их.

1.11 1) да; 2) нет; 3) нет; 4) нет.

К разделу 1.4

1.12 33^2.

1.13 $2 \cdot \sum\limits_{k=1}^{9} k^2 + 10^2 = 670$.

1.14 5.

1.15 1) 2^n; 2) 2^{n-1}; 3) 2^{n-2}; 4) 2^{n-2}; 5) $2^{\frac{n}{2}}$, если n – четно, $2 \cdot 2^{\frac{n-1}{2}}$, если n – нечетно; 6) 2^{n-1}; 7) 2^{n-1}; 8) $2^n - 2$.

1.16 1) 3^k; 2) 3^k; 3) 1; 4) 0.

1.17 1) 2^k; 2) 2^k; 3) 5^k; 4) 1; 5) 3^k; 6) 1; 7) 3^k; 8) 1.

1.18 1) 3^k; 2) 3^k.

1.19 1. 1) да, да, да, да; 2) да, да, нет, нет; 3) да, да, да, да; 4) да, нет, да, нет; 2. 1) n, $n = 0, 1, \ldots$; 2)n^2, $n = 0, 1, \ldots$; 3) n, $n = 0, 1, \ldots$; 4) $2n$, $n = 0, 1, \ldots$.

1.21 $n - (m_1 + 1)(m_2 + 1) \ldots (m_k + 1)$.

К разделу 1.6

1.24 190.

1.25 1) $3 \cdot 2^{n-2}$ при $n \geq 2$; 2) 2^{n-3} при $n \geq 3$; 3) $13 \cdot 2^{n-4}$; 4) $9 \cdot 2^{n-4}$; 5) $5 \cdot 2^{n-4}$; 6) $3 \cdot 2^{n-4}$; 7) $7 \cdot 2^{n-4}$; 8) $3 \cdot 2^{n-4}$ (в 3)-8) при $n \geq 4$).

1.26 2. 42; 3. 166; 4. 77; 5. 878; 6. 25; 7. $\sum\limits_{j=1}^{k} \sum\limits_{1 \leq i_1 < \ldots < i_j \leq k} (-1)^{j-1} \lfloor \frac{n}{p_{i_1} \cdot \ldots \cdot p_{i_j}} \rfloor$;

8. $(k-1)+\sum\limits_{j=0}^{k}\sum\limits_{1\le i_1<\ldots<i_j\le k}(-1)^j\lfloor\frac{n}{p_{i_1}\cdot\ldots\cdot p_{i_j}}\rfloor$.
1.27 20.
1.28 1) 20; 2) 80; 3) 60; 4) 40.

К разделу 1.8
1.30 1. 3; 2. 2; 3. 4; 4. 5.
1.31 1) 4; 2) 11; 3) 22; 4) 12.
1.32 2. да.
1.37 нет.
1.38 да.

К разделу 2.2
2.2 $C_{35}^3=6545$.
2.3 $A_3^2=6$.
2.4 1) $C_{20}^4=4845$; 2) $\bar{C}_{20}^4=8855$; 3) $A_{20}^4=116280$; 4) $\bar{A}_{20}^4=160000$.
2.5 $C_{25}^4\cdot C_{25}^5\cdot C_{25}^7$.
2.6 1. $n!$; 2. $(n-1)!$
2.7 1) $300+300^2+300^3$; 2) $300+300\cdot 299+300\cdot 299\cdot 298$.
2.8 1) $\frac{(n-1)!}{2}$; 2) $\frac{n!(n-1)!}{2}$.
2.11 1. $n!\cdot\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}$; 2. $n!\cdot\sum\limits_{k=0}^{n-m}C_{m+k}^k\cdot\frac{(-1)^k}{k!}$.
2.12 $\frac{19}{30}$ (см. задачу 2.11).
2.13 $\frac{3}{8}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, 0, $\frac{1}{24}$ (см. задачу 2.11).
2.14 1. $(n)_k$; 2. $\sum\limits_{k=1}^{n}(n)_k$.
2.15 $n+1$.
2.16 1. $\bar{C}_k^n$; 2. 1) $\bar{C}_3^2=6$; 2) $\bar{C}_3^3=10$; 3) $\bar{C}_4^2=10$; 4) $\bar{C}_4^5=56$.

К разделу 3.2
3.1 1. 1) да; 2) нет; 3) да; 4) да; 2. 1) да; 2) да; 3) да; 4) нет.
3.2 1) да; 2) да; 3) нет; 4) нет.
3.3 1) да; 2) нет; 3) да; 4) нет.
3.4 1. 1) рефлексивно, симметрично, транзитивно; 2) иррефлексивно, транзитивно; 3) иррефлексивно, симметрично; 4) рефлексивно, симметрично, транзитивно; 2. 1) иррефлексивно; 2) иррефлексивно, транзитивно; 3) рефлексивно, симметрично, транзитивно; 4) симметрично.
3.5 1) $(a_1,\ldots,a_n)\le(b_1,\ldots,b_n)$, если $a_1\le b_1$, $\ldots$, $a_n\le b_n$; 2) расположение слов не более, чем из n букв, по алфавиту.

3.7 1) 2^k; 2) 2^{k^2}.

К разделу 3.4

3.8 1) да; 2) да; 3) да; 4) нет.
3.9 1) да; 2) нет.
3.10 1) нет; 2) да.
3.11 1) да; 2) да; 3) да; 4) нет.
3.12 1) да; 2) нет.
3.13 1) нет; 2) да.
3.14 1) да; 2) да; 3) нет, не рефлексивно; 4) да.
3.15 1) нет; 2) да; 3) нет; 4) да.

К разделу 3.6

3.16 1) да, линейный; 2) да, частичный.
3.17 1) да, линейный; 2) нет.
3.18 1) да; 2) да; 3) нет; 4) да.
3.19 1) да, линейный; 2) нет.
3.20 1) да, частичный; 2) нет.
3.21 1) да, наименьший $(1,1)$, наибольший $(3,3)$; 2) нет, не антисимметрично; 3) да, наименьший $(1,1)$, наибольший $(3,3)$; 4) да, минимальные $(1,1)$, $(2,2)$, $(3,3)$, максимальные $(1,3)$, $(3,1)$.

К разделу 3.8

3.26 1. 1) 2; 2) 3; 3) 2; 4) 4.
3.27 1. 1) 4; 2) 7; 3) 9; 4) 22; 2. 1) (101); 2) (0101); 3) (1100); 4) (10101).
3.29 1. n; 2. C_n^d.
3.34 3. 1) 2^r; 2) $C_n^r \cdot 2^r$; 4. 3^n.

К разделу 4.2

4.1 1) $C_1 \cdot 2^n$; 2) $(C_1 + C_2 n) \cdot 2^n$; 3) $C_1 \cdot (-1)^n + C_2 \cdot (-2)^n$; 4) $C_1 \cdot (-4)^n + C_2 \cdot 3^n$; 5) $C_1 \cdot 2^n + C_2$, если n – кратно трем, $C_1 \cdot 2^n - C_2$, если n – не кратно трем; 6) $C_1 + C_2 \cdot (-\sqrt{2})^n + C_3 \cdot (\sqrt{2})^n$; 7) $(C_1 + C_2 n + C_3 n^2) \cdot (\sqrt{3})^n$; 8) $C_1 + C_2 \cdot 2^n + C_3 \cdot 3^n$.
4.2 1) $5 \cdot 3^n$; 2) $(-2)^n + 1$; 3) $(3n+1) \cdot 2^n$; 4) $3^{n-1} + 2^{n-1}$, 5) $2^{n-2} + 1 + (-1)^n$; 6) $n^2 - n + 1$; 7) $(2n+1) \cdot 2^n + (-1)^n$; 8) 2, если n кратно трем, и 0, если n не кратно трем.
4.3 1) $C_1 + 3n$; 2) $C_1 \cdot 5^n - \frac{3}{2}$; 3) $C_1 \cdot (-3)^n + \left(-1 + \frac{3}{4}n\right)$; 4) $(C_1 - 3n) \cdot 2^n + C_2 \cdot 3^n$; 5) $C_1 \cdot (-2)^n + \left(C_2 + \frac{1}{3}n\right) \cdot 3^n$; 6) $(C_1 + C_2 n + C_3 n^2) + 24 \cdot 2^n$; 7) $C_1 + (C_2 + C_3 n + \frac{1}{4}n^2) \cdot 3^n$; 8) $C_1 \cdot (-\sqrt{3})^n + C_2 \cdot (\sqrt{3})^n + C_3 + 5n$.

4.4 1) $(2n+1)\cdot 3^n$; 2) n^2-n+1; 3) $(-\sqrt{2})^n+n\cdot(\sqrt{2})^n$; 4) $2\cdot(-3)^n+n\cdot 4^n$; 5) $(1+2n)+n\cdot 2^n$; 6) $(1-3n+n^2)\cdot 2^n-1$; 7) $1-(-2)^{n-1}+3^{n-1}+n^2$; 8) $2+\frac{1}{9}n^3$, если n кратно трем, и $\frac{1}{9}n^3$, если n не кратно трем.
4.5 $\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$.
4.6 $x_n-2x_{n-1}+x_{n-2}=0$, $x_1=a_1, x_2=a_1+d$.
4.7 $x_n-qx_{n-1}=0$, $x_1=b_1$.
4.8 1. 1) $x_n-2x_{n-1}+x_{n-2}=0$; 2) $x_n-3x_{n-1}+3x_{n-2}-x_{n-3}=0$; 3) $x_n-4x_{n-1}+6x_{n-2}-4x_{n-3}+x_{n-4}=0$; 4) $x_n-5x_{n-1}+10x_{n-2}-10x_{n-3}+5x_{n-4}-x_{n-5}=0$; 2. $x_n-\sum\limits_{j=1}^{k+1}(-1)^{j-1}C_{k+1}^{j}x_{n-j}=0$.

6 Литература

1. Архипов Г.И., Садовничий В.А., Чубариков В.Н. Лекции по математическому анализу. Лекция 1. Множества. – М.: Издательство МГУ, 1995, 172 с.

2. Гаврилов Г.П., Сапоженко А.А. Задачи и упражнения по дискретной математике. – М.: Физматлит, 2004, 416 с.

3. Верещагин Н.К., Шень А. Лекции по математической логике и теории алгоритмов. Часть 1. Начала теории множеств. – М.: МЦНМО, 2002, 128 с.

4. Лавров И.А., Максимова Л.Л. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. – М.: Наука, 1984, 223 с.

5. Матросов В.Л., Стеценко В.А. Лекции по дискретной математике. – М.: МГПУ, Прометей, 1997, 219 с.

6. Редькин Н.П. Дискретная математика. – СПб., М., Краснодар: Лань, 2006, 96 с.

7. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику. – М.: Высшая школа, 2001, 384 с.

Содержание

СЕЛЕЗНЕВА Светлана Николаевна

ОСНОВЫ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ

Учебное пособие

Электронный адрес автора:
e-mail: selezn@cs.msu.su

Издательский отдел
факультета вычислительной математики и кибернетики
МГУ имени М.В. Ломоносова
Лицензия ИД N 05899 от 24.09.01 г.
119992, ГСП-2, Москва, Ленинские горы, МГУ имени М.В. Ломоносова,
2-й учебный корпус