Развернутый план ответа

Вопрос 9. *Операция замыкания. Свойства операции замыкания. Замкнутые классы. Предполные классы алгебры логики. Теорема о предполных классах.*

Определение. Пусть $A \subseteq P_2$. *Замыканием* A называется множество всех функций, выразимых формулами над функциями из множестьва A. Обозначение замыкания: $[A]$.

Свойства операции замыкания:

1) $[\emptyset] = \emptyset$;
2) $[P_2] = P_2$;
3) $A \subseteq [A]$ для любого множества A;
4) если $A \subseteq B$, то $[A] \subseteq [B]$;
5) $[[A]] = [A]$ для любого множества A.

Определение. Множество A называется *замкнутым классом*, если $[A] = A$.

Определение. Множество A называется *полной системой*, если $[A] = P_2$.

Определение. Функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ *сохраняет константу 0*, если

$$f(0, \ldots, 0) = 0.$$

Множество всех функций, сохраняющих константу 0, обозначается как T_0. Множество T_0 – замкнутый класс.

Определение. Функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ *сохраняет константу 1*, если

$$f(1, \ldots, 1) = 1.$$

Множество всех функций, сохраняющих константу 0, обозначается как T_1. Множество T_1 – замкнутый класс.

Определение. Функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ называется *линейной*, если ее можно задать в виде

$$f(x_1, \ldots, x_n) = c_0 \oplus c_1 x_1 \oplus \ldots \oplus c_n x_n,$$

где $c_0, c_1, \ldots, c_n \in E_2$ – коэффициенты. Множество всех линейных функций обозначается как L. Множество L – замкнутый класс.

Определение. Функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ называется *монотонной*, если для всех таких наборов

$$\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \text{ и } \tilde{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_n),$$

что $\alpha_i \leq \beta_i$ при всех $i = 1, \ldots, n$ верно

$$f(\tilde{\alpha}) \leq f(\tilde{\beta}).$$

Множество всех монотонных функций обозначается как M. Множество M – замкнутый класс.

Определение. Функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ называется *самодвойственной*, если для нее верно функциональное равенство

$$\overline{f(x_1, \ldots, x_n)} = f(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n).$$

Множество всех самодвойственных функций обозначается как S. Множество S – замкнутый класс.

Определение. Пусть $B \subseteq P_2$. Множество B называется *предполным классом*, если

1) $[B] \neq P_2$;

2) для любой функции $f \in P_2 \setminus B$ верно $[B \cup \{f\}] = P_2$.

Предполный класс всегда является замкнутым классом.

Теорема. (о предполных классах) *В P_2 есть всего пять предполных классов: T_0, T_1, L, M, S.*

Доказательство.

1. Докажем вначале, что ни один из перечисленных классов не содержится ни в каком другом и не равен P_2.

	$\notin T_0$	$\notin T_1$	$\notin L$	$\notin M$	$\notin S$
T_0		0	$x \cdot y$	$x \oplus y$	0
T_1	1		$x \cdot y$	$x \oplus y \oplus z$	1
L	$\bar{x}$	$\bar{x}$		$\bar{x}$	0
M	1	0	$x \cdot y$		0
S	$\bar{x}$	$\bar{x}$	$x \cdot y \oplus x \cdot z \oplus y \cdot z$	$\bar{x}$	

2. Для каждого из перечисленных классов выполняется п. 1 определения предполного класса, так как каждый из перечисленных классов замкнут. Например, $[T_0] = T_0 \neq P_2$.

3. Для каждого из перечисленных классов выполняется п. 2 определения предполного класса. Например, рассмотрим класс T_0. Пусть $f \notin T_0$. Тогда

$[T_0 \cup \{f\}] = P_2$ по теореме Поста, так как содержит полную подсистему $f \notin T_0$, $1 \notin T_1$, $x \cdot y \notin L$, $x \oplus y \notin M$, $0 \notin S$.

Из пп. 2-3 доказательства каждый из классов T_0, T_1, L, M, S предполные.

4. Докажем от противного, других предполных классов в P_2 нет. Пусть B – предполный класс.

а) Если B не содержится ни в одном из классов T_0, T_1, L, M, S, то по теореме Поста $[B] = P_2$. Это противоречит п. 1 определения предполного класса.

б) Пусть B строго вложен в какой-то из классов T_0, T_1, L, M, S. Например, пусть $B \subset T_0$. Выберем $f \in T_0 \setminus B$. Тогда $[B \cup \{f\}] \subseteq [T_0] = T_0 \neq P_2$. Это противеречит п. 2 определения предполного класса.

Значит, B совпадает с одним из классов T_0, T_1, L, M, S.

Теорема полностью доказана.